第５章　電磁気と相対論１

§５－１　はじめに

第２章で説明したように，アインシュタインは，「特殊相対性原理」と同時に，「光速不変の原理」を用いて特殊相対性理論を構築した。「光速不変の原理」は，

真空中における光の速さは，どんな速度で動いている慣性系（等速直線運動している座標系）においても，光源の速度に関係なく一定である

というものであった。

アインシュタインは，電磁気学の法則は任意の慣性系で同じ形に書け，「特殊相対性原理」を満たしており，したがって，光は電磁波(電場と磁場の波)であるから，電磁波の速度は任意の慣性系で同じであると考えていた。

運動方程式と「特殊相対性原理」

α系で静止している質量mの質点に，x軸方向へ力F_xがはたらいたときの質点の加速度をa_xとすると(図５－１(A))，ニュートンの運動方程式は，

$$ma_x = F_x \tag{5－1 a}$$

と書ける。α系に対してx軸方向へ速度vで等速運動しているβ系ではどのようになるのであろうか。(５－１ａ)の運動方程式が「特殊相対性原理」を満たす(ローレンツ変換のもとに不変)ならば，β系での加速度と力をそれぞれa'_x, F'_xとすると(図５－１(B))，

$$ma'_x = F'_x \tag{5－1 b}$$

が成り立たなければならない。

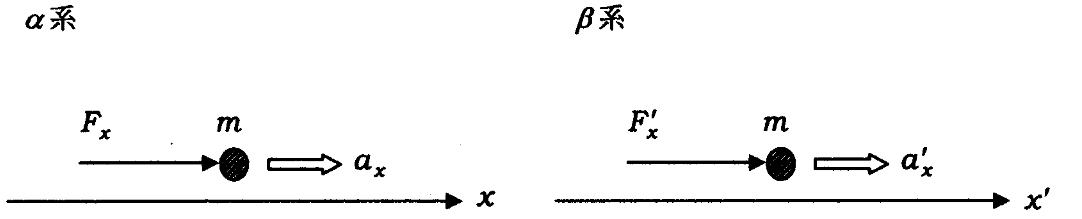

図５－１(A)　　図５－１(B)

(３－35)式より，α系での力のx成分とβ系での力のx'成分F'_xは等しい。

$$F_x = F'_x$$

一方，α系での加速度a_xは，β系での加速度a'_xを用いて，

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma(v)^3\left(1+\dfrac{v}{c^2}v'_x\right)^3} \tag{2－39 b}$$

と書ける。これらを(５－１ａ)式へ代入すると，β系での運動方程式は，

$$\frac{ma'_x}{\gamma(v)^3\left(1+\dfrac{v}{c^2}v'_x\right)^3} = F'_x \tag{5－2}$$

となり，(５－２)式は(５－１ｂ)式と異なる。

したがって，(５－１)の形の運動方程式はローレンツ変換のもとに不変ではない，すなわち，(５－１)式は，物理法則が任意の慣性系で同じ形に書けるという「特殊相対性原理」を満たさない。しかし，(５－１)式は，第２章で説明したように，ガリレイ変換のもとに不変である。したがって，ニュートン力学においては，(５－１)式を運動方程式として採用することができても，相対論，すなわち，ローレンツ変換によって表される理論においては，運動方程式として採用することはできない。実際，相対論的運動方程式は(３－４)式で与えられ，ローレンツ変換のもとでの不変性を満たしている。

クーロンの法則と「特殊相対性原理」

点電荷に関するクーロンの法則はどうであろうか。第４章において説明したように，真空中において，α 系の原点Oに点電荷 q が静止しているとき，q が点P $(x,0,0)$ につくる電場は(図５－２(A))，クーロンの法則より，

$$E_x = k\frac{q}{x^2} \qquad (5-3\,\mathrm{a})$$

と書ける。ここで，k はクーロンの法則における比例定数で，$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (ε_0：真空の誘電率)である。

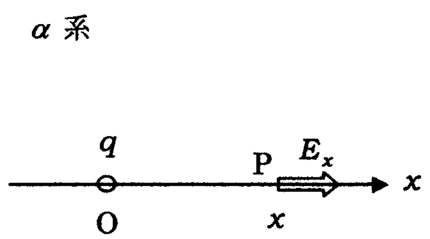

図５－２(A)

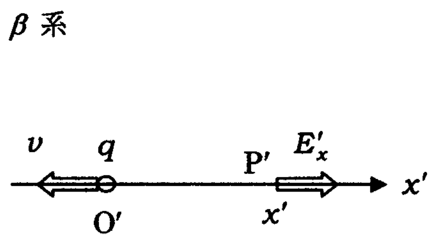

図５－２(B)

β 系の時刻 $t'=0$ において考える。このとき β 系で，電荷 q は原点O′にあり，速さ v で x' 軸負方向へ動いている。(５－３ａ)式のクーロンの法則が「特殊相対性原理」を満たす(ローレンツ変換のもとに不変)ならば，β 系での点Pの位置を，点P′$(x',0,0)$，点P′における電場の強さを E'_x とすると(図５－２(B))，

$$E'_x = k\frac{q}{x'^2} \qquad (5-3\,\mathrm{b})$$

が成り立たなければならない。ここで，第４章でも述べたように，電荷 q は座標系によらず不変である。

一方，(４－21)式より，α 系での電場の x 成分と β 系での電場の x' 成分は等しい。

$$E_x = E'_x$$

一方，$t'=0$ において(２－32ｂ)式より，

$$x = \gamma(v)x' \qquad (5-4)$$

と書ける。これらを(５－３ａ)式へ代入すると，β 系での電場の x' 成分は，

$$E'_x = E_x = k\frac{q}{x^2}$$

$$= k\frac{1}{\gamma(v)^2}\frac{q}{x'^2} \qquad (5-5)$$

となり，(５－５)式は(５－３ b)式と異なる[1]。

したがって，クーロンの法則，すなわち，クーロンの法則を表す電場の表式(５－３)はローレンツ変換のもとに不変ではない。すなわち，(５－３)式は，物理法則が任意の慣性系で同じ形に書けるという「特殊相対性原理」を満たさない。電場の満たす方程式もローレンツ変換のもとに不変となるようにすることが可能であるが，それには次節で示すように，クーロンの法則を書き換え，微分形式に書き直し，電場と磁場を同時に考察しなければならない。

本章では，電磁気学の法則を表す電場と磁場の微分形式の方程式が，ローレンツ変換のもとに不変であること，すなわち，「特殊相対性原理」を満たすことを示そう。そのために，まず，高校の物理で習う電磁気学の法則のなかで，その基本となっている３つの法則，すなわち，クローンの法則(ガウスの法則)，(一般化された)アンペールの法則および電磁誘導の法則の微分形式について，順次説明していく。

§５－２　クーロンの法則とガウスの法則

ガウスの法則

付録［A］でも説明するように，ガウスの法則はクーロンの法則を一般化したものである。ある面の単位面積を垂直に貫く電気力線の数を，その面に垂直な電場の強さに等しいと定義すると，ガウスの法則は，「真空中の任意の閉曲面内の全電気量をQとすると，その閉曲面から外へ出る電気力線の総数は$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$に等しい」といい表すことができる。ここで，ε_0は真空の誘電率である。

この法則は，真空中で閉曲面として球面をとり，その球の中心に点電荷qがある場合は，すぐに理解できる。すなわち，図５－３のように，qからr離れた点Pの電場の強さEは，クーロンの法則より，

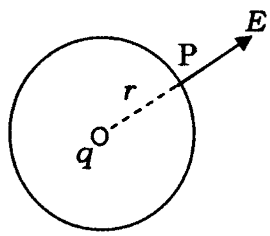

図５－３

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

と書ける。点Pを貫く電気力線の数は単位面積あたりE本であるから，半径rの球の表面積$4\pi r^2$および$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$を用いて，この球面を貫く電気力線の総数は，

---

1) 異なるのは当然である。§４－５で説明したように，速度vで動いている電荷が進行方向へつくる電場は，静止しているときの$\dfrac{1}{\gamma(v)^2}$になる。実際，β系で原点に静止している電荷が点P′につくる電場E''は，$t'=0$において，$E''_x = k\dfrac{q}{x'^2}$と書けるので，$E'_x = \dfrac{E''_x}{\gamma(v)^2}$の関係が成り立つ。

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

となり，ガウスの法則が成り立つことがわかる。

電気力線は，正電荷から出て負電荷に入る以外，途中で発生・消滅または枝分かれすることがないので，閉曲面内の点電荷の数が増えても同様であり，また，閉曲面が球面でなくても同じはずである。さらに，電気力線が外部から内部へ入るとき，電気力線の数を負と数えれば，図５－４のように，点Ｏの点電荷qが凹閉曲面で囲まれているとき，微小面dS_1から出る電気力線と微小面dS_2から入る電気力線は打ち消し合い，qからＯＰ方向へ出る電気力線は，微小面dS_3から出るものだけである。このような場合も考慮して，任意の閉曲面に対し，上のガウスの法則が成り立つことがわかる。

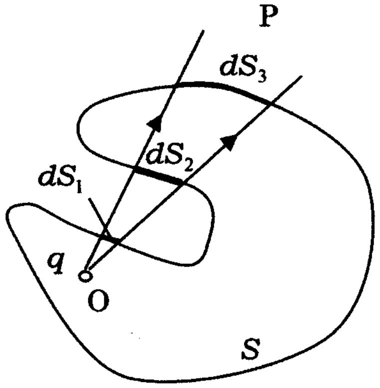

図５－４

このことを，積分を用いて数学的に書き表してみよう。図５－５のように，閉曲面S上の微小面積dSの微小曲面を表すベクトルを$\boldsymbol{dS}$と定義する。$\boldsymbol{dS}$の大きさは面積dSに等しく，向きは微小曲面に垂直で内部から外部に向かう向きとする。いま，点Ｐの電場を$\boldsymbol{E}$とすると，電場の定義からＰの微小曲面を貫く電気力線の数は$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$と書ける。したがって，$S$から外へ出る電気力線の総数は，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$の$S$全体の和をとり，

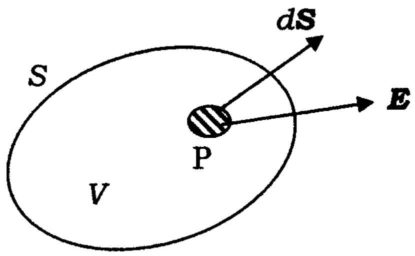

図５－５

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$$

と書ける。これは，面積分といわれるものであり決まった計算法があるが，ここでは，単に$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$という量の$S$全体の和を表す数学的記号と思えばよい。一方，$S$内の全電荷は，任意の点の電荷体積密度(単位体積あたりの電気量)をρとすると，

$$\int_V \rho\, dv$$

と書ける。これは，体積積分といわれるものであるが，やはりρのSで囲まれた立体図形V全体の和を表す数学的記号と思えばよい。これらより，ガウスの法則は，

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv} \qquad (5-6)$$

となる。(５－６)式を積分形式のガウスの法則という。

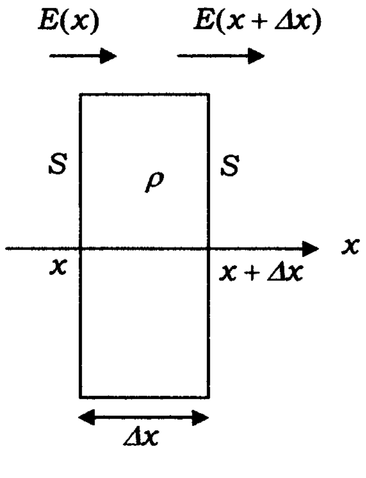

図５－６

微分形式

まず，電場がx軸方向を向き，y，z座標に依存しないとき，ガウスの法則の微分形式を求めよう。図５－６のように，真空中に電荷が体積密度ρで一様に分布しているとき，両側面がx軸に垂直で，側面の面積がともにSの直方体を考える。左側側面のx座標をx，電場を$E(x)$，右側側面のx座標を$x+\Delta x$，電場を$E(x+\Delta x)$とする。このとき，電気力線は，直方体へ左側側面から入り右側側面から出るので，内部から外部へ出る電気力線の総数は$\{E(x+\Delta x)-E(x)\}S$となる。一方，直方体内の電気量は，$\rho S\Delta x$と書けるから，ガウスの法則は，

$$\{E(x+\Delta x)-E(x)\}S=\frac{\rho S\Delta x}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad \frac{E(x+\Delta x)-E(x)}{\Delta x}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となる。ここで，$\Delta x\to 0$とすると，

$$\frac{dE}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

を得る。これは，特別な場合の微分形式のガウスの法則である。

次に，電場が任意の方向を向き，x座標のみならず，y，z座標にも依存する一般的な場合の微分形式のガウスの法則を導こう。

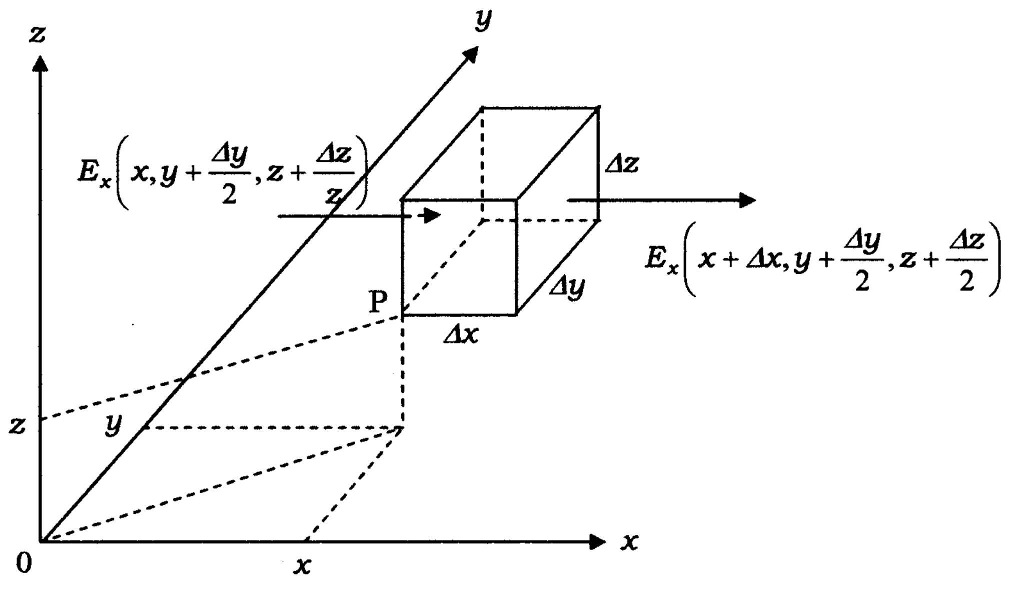

図５－７

図５－７のように，１つの頂点Pの座標が(x,y,z)であり，３辺の長さが$\Delta x,\Delta y,\Delta z$の微小な直方体を考える。点Pの電場を$(E_x,E_y,E_z)$，電荷体積密度を$\rho(x,y,z)$とすると，$x$軸に垂直な右側の側面から出る電気力線と左側の側面から入る電気力線の差は，

$$\left\{E_x\left(x+\Delta x,y+\frac{\Delta y}{2},z+\frac{\Delta z}{2}\right)-E_x\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z+\frac{\Delta z}{2}\right)\right\}\Delta y\Delta z=\frac{\Delta E_x}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

と近似できる。これより，(５－６)式の左辺は，

$$\left(\frac{\Delta E_x}{\Delta x}+\frac{\Delta E_y}{\Delta y}+\frac{\Delta E_z}{\Delta z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

となる。一方，(５－６)式の右辺は，

$$\frac{\rho\left(x+\frac{\Delta x}{2},y+\frac{\Delta y}{2},z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\varepsilon_0}$$

と近似される。ここで，$\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0$ として，微分形式のガウスの法則を，

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (5-7\,\mathrm{a})$$

と得る。$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は偏微分といわれるもので，f が x,y,z の関数であるとき，y と z を一定にして(定数と考えて) x で微分することを意味する。例えば，$f(x,y,z)=x^3yz^2+xy^2z^3$ のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2yz^2+y^2z^3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3z^2+2xyz^3$$

等となる。通常(５－７ a)式の左辺を $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ と書き[2]，(５－７ a)式を，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (5-7\,\mathrm{b})$$

と書く。(５－７ a， b)式を微分形式のガウスの法則という。

磁場に関するガウスの法則

電場は電荷によってつくられるが，磁場は何によってつくられるのであろうか。電場と同じように，磁場をつくるもとになるものとしての単独の磁荷は，現在まで見つかっていない。磁石にはＮ極とＳ極があるが，磁石を２つに切っても，常にＮ極とＳ極が対になって現れ，Ｎ極だけあるいはＳ極だけを単独に取り出すことはできない。すなわち，磁石から単磁極(Ｎ極だけあるいはＳ極だけ，これを英語でモノポールという)を取り出すことができず，磁場をつくり出すもとになる磁荷は単独には存在しないと考えられている。ただし，将来単磁極が見つけられる可能性は否定されていない。

そこで，単磁極は存在しないと仮定しよう。単磁極が存在しなければ，磁場は電流(あるいは電場の相対的な運動)によってのみつくられ[3]，磁力線は常に閉じており，発生したり消滅したりしない。上で説明した電場に関するガウスの法則に対応させると，単磁極が存在しないということは，磁荷(あるいは磁荷密度)が常に０であることになるから，(５－６)式および(５－７)式で $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}$ として，

---

[2] div は英語の divergence（発散）の略。電場は電荷から湧き出（発散）しているのである。

[3] 次節で説明するように，電流はその周囲に円形の磁場をつくる。

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \qquad (5-8)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \qquad (5-9\,\mathrm{a})$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0 \qquad (5-9\,\mathrm{b})$$

を得る。(5－8)，(5－9 a， b)式を，磁場に関するガウスの法則という。

§5－3　アンペールの法則

単磁極(単独の磁荷)は現在までのところ見つかっていない。§4－3で考察したように，磁場は電場の相対的な運動によってつくられるが，簡単な実験で磁場をつくるには，電流を流すことによってつくられる。電流が流れると，電場が動き，そのために磁場ができる。電流のつくる磁場について，経験的に見つけられた基本的な法則に，アンペールの法則とビオ・サバールの法則がある。ビオ・サバールの法則は，付録［B］で説明するように，微分形で書かれ計算に便利な法則である。一方，アンペールの法則はビオ・サバールの法則とは異なり，計算よりは物理的概念をはっきりさせるのに役立つ。

アンペールの法則は，直線電流のつくる磁場を一般化したものである。真空中で強さIの直線電流がr離れた点につくる磁場の強さB(磁束密度の大きさ)は実験的に求められ，

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (5-10)$$

となる。ここで，μ_0は真空の透磁率であり，Bの向きは，Iの向きに進む右ねじの回る向きである。(5－10)式において，$2\pi r$が半径rの円周の長さに等しく，図5－8のように，磁束密度$\boldsymbol{B}$が円の接線方向を向いていることから，一般に，(5－10)式を次のように書き換えることができるであろう。

$$\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I \qquad (5-11)$$

ここで，左辺は線積分といわれるもので，円周上の各点で，その点の$\boldsymbol{B}$と円の接線方向(電流の向きに右ねじが進むとき，右ねじの回る方向)の微小な長さのベクトル$d\boldsymbol{l}$の内積をとり，円の一周について和をとったものである。いまの場合，円周上の各点で磁束密度の強さはどこでも等しいので，(5－11)式の左辺は，

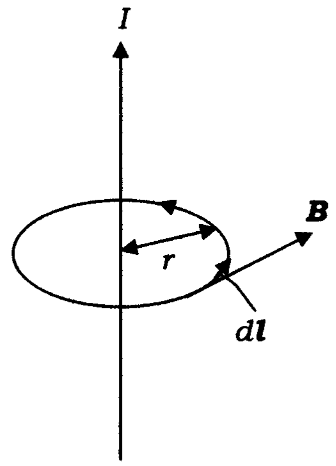

図5－8

$B\times 2\pi r(|\boldsymbol{B}|=B)$となり，(5－10)式に一致する。線積分の計算のもう1つの具体例は，§5－6で説明する。

上で述べたように，$\boldsymbol{B}$と$d\boldsymbol{l}$の内積をとれば，(5－11)式の左辺の積分経路は，円である必要はなく，任意の閉曲線をとることができる。さらに，右辺も1本の直線電流である必要はなく，ある1つの閉曲線を貫くすべての電流の和をとればよい。これは，ガウスの法則において，閉曲面は球面である必要はなく，任意の閉曲面をとることができること，および，閉曲面内の電荷は点電荷である必要はなく，閉曲面内のすべての電荷の和をとれば

よいのと同様である。

図５－９のように，閉曲線Cで囲まれた曲面をS，Sの単位面積を貫いて流れる電流(電流密度)を$\boldsymbol{j}$(電流の流れる向きを考慮して，ベクトルで書く)とすると，(５－11)式は，

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}} \quad (5-12\,\mathrm{a})$$

と書ける。ここで，左辺は，閉曲線Cに沿って$\boldsymbol{j}$の正の向きに進む右ねじの回る向きに回る線積分であり，右辺は，曲面Sに関する面積積分である。

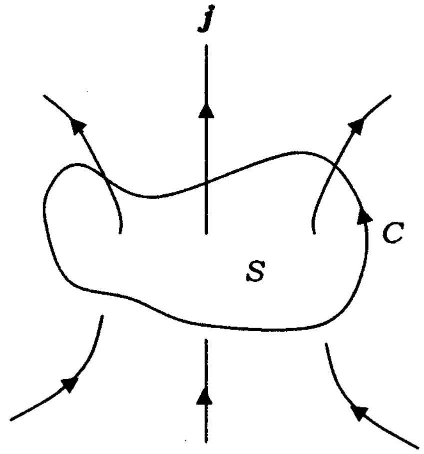

図５－９

(５－12ａ)式は，真空中の磁束密度$\boldsymbol{B}$と磁場$\boldsymbol{H}$の関係式$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$を用いて，次のように書き直すことができる。

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}} \quad (5-12\,\mathrm{b})$$

(５－12ａ，ｂ)式を積分形式のアンペールの法則という。ここで，磁場$\boldsymbol{H}$は単位磁荷にはたらく力であることを思い出すと，(５－12ｂ)式は，「単位磁荷を閉曲線Cに沿って一周させるとき，磁場が単位磁荷にする仕事は，Cによって囲まれた曲面Sを貫く全電流に等しい」を表すと考えられる。これが言葉で言い表したときのアンペールの法則である。

アンペールの法則を用いる具体例は，付録［C］で説明する。

微分形式

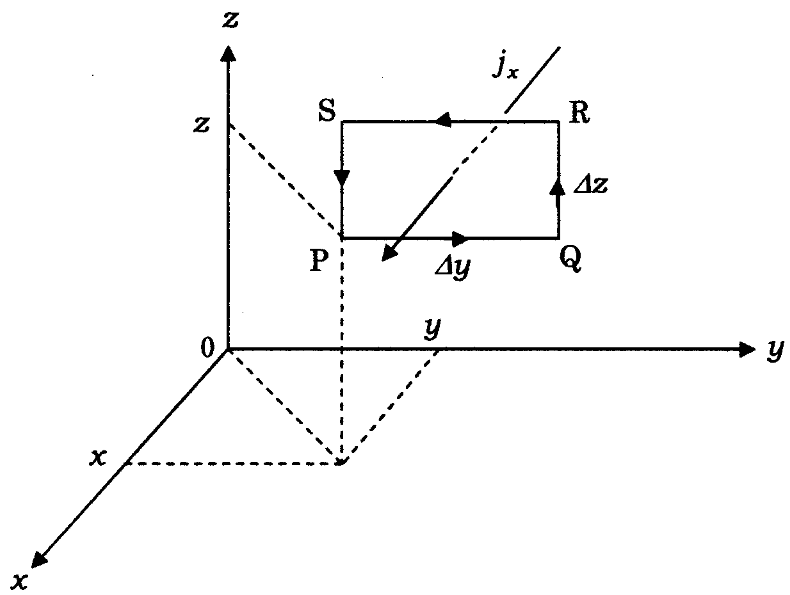

図５－10

図５－10のように，x軸の正方向に電流密度j_xの一様な電流が流れているとき，(５－

12 a)式を考察する。いま，左辺の積分経路として，yz 平面に平行な長方形(2辺の長さは $\Delta y, \Delta z$)の閉回路P→Q→R→S→Pをとり，点Pの空間座標を(x,y,z)とする。Δy，Δz を微小な長さとすると，経路P→Qを動くとき，左辺の積分は，磁束密度のy成分B_yを用いて，$B_y\left(x,y+\dfrac{\Delta y}{2},z\right)\cdot\Delta y$ と近似でき，経路Q→Rを動くとき，左辺の積分は，磁束密度のz成分B_zを用いて，$B_z\left(x,y+\Delta y,z+\dfrac{\Delta z}{2}\right)\cdot\Delta z$ と近似できる。同様に，経路R→Sを動くとき，左辺の積分は$-B_y\left(x,y+\dfrac{\Delta y}{2},z+\Delta z\right)\cdot\Delta y$ と近似でき，経路S→Pを動くとき，左辺の積分は，$-B_z\left(x,y,z+\dfrac{\Delta z}{2}\right)\cdot\Delta z$ と近似できる。ここで，等式

$$B_z\left(x,y+\Delta y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)-B_z\left(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)=\frac{\Delta B_z}{\Delta y}\cdot\Delta y$$

$$B_y\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z+\Delta z\right)-B_y\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)=\frac{\Delta B_y}{\Delta z}\cdot\Delta z$$

を用いると，閉回路を一周するとき，(5－12 a)式の左辺の積分は，

$$\left(\frac{\Delta B_z}{\Delta y}-\frac{\Delta B_y}{\Delta z}\right)\Delta y\Delta z$$

と求められる。一方，長方形PQRSを貫く電流は$j_x\Delta y\Delta z$であるから，微分形式のアンペールの法則は，$\Delta y\to 0,\Delta z\to 0$ として，

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\mu_0 j_x} \qquad (5-13\,\mathrm{a})$$

となる。

電流密度のy成分，z成分についても同様に，

$$\boxed{\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\mu_0 j_y} \qquad (5-13\,\mathrm{b})$$

$$\boxed{\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\mu_0 j_z} \qquad (5-13\,\mathrm{c})$$

と書ける。(5－13 a－c)式をまとめて，

$$\boxed{\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}} \qquad (5-13\,\mathrm{d})$$

と書く[4]。

§5－4　電磁誘導の法則

ファラディーの電磁誘導の法則は次のようにいい表される。

「コイルを貫く磁束が変化すると，その変化を妨げる向きに，変化の大きさに比例する誘

[4] rot は英語の rotation（回転）の略。磁場は電流のまわりを回転しているのである。

導起電力が生じる」

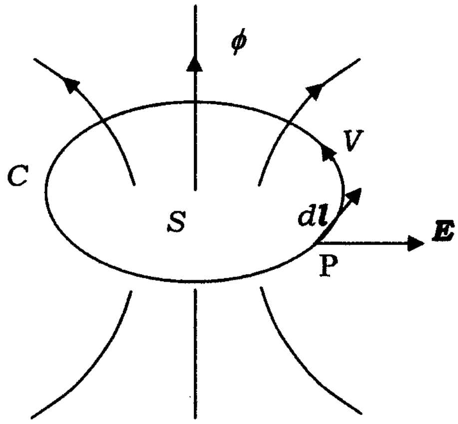

図５－11

図５－11 のコイルを貫く磁束をϕとすると，コイルに生じる誘導起電力V(磁束ϕの向きに進む右ねじの回る向きを正とする)は，

$$V=-\frac{d\phi}{dt} \qquad (5-14)$$

と書ける。コイルに誘導起電力が生じると，コイル内の電荷qには誘導起電力の向きに力がはたらくはずでる。いま，コイルに電流が流れていないとすると，コイルの導線内の電荷qは観測者(座標系)に対して静止している。それにもかかわらずqに電磁気的な力が ha はたらくので，コイルには電場が生じていなければならない。このコイル上の任意の点Pに生じている電場を$\boldsymbol{E}$とする。図５－11 のように，誘導起電力Vの正の向きの微小な長さ(線素片)のベクトルを$d\boldsymbol{l}$とすると，誘導起電力Vは，コイルの閉回路をCとして，

$$V=\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

となる。

一方，コイルを貫く磁束は次のように書ける。Cで囲まれた曲面をS，S内の任意の点の磁束密度を$\boldsymbol{B}$，S上の微小な面に垂直でその面積を大きさとする(面素片)ベクトルを$d\boldsymbol{S}$とすると，Sを貫く磁束ϕは，

$$\phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

と書ける。これらを(５－14)式へ代入して，積分形式の電磁誘導の法則

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (5-15)$$

を得る。

誘導電場

電磁誘導の現象において現れる電場は，図５－11 を見てもわかるように，見かけ上，正負の電荷によってつくられたものではないように見える。そこで，このような電場を，明らかに電荷によってつくられた電場(クーロン電場，あるいは静電場)と区別して，誘導電場という。したがって，§４－２で説明した例で，β系において導線外に生じる電場も，見かけ上，正負の電荷によってつくられたものではないように見え，誘導電場と考えることができる。しかし，この電場は，ローレンツ変換(相対論的な効果)により，導線上に正の電荷が現れ，この正電荷のつくる電場であった。図５－11 の例においても，電磁誘導によって現れる電場をローレンツ変換を考えることにより，正負の電荷のつくる電場とみなすことができるのであろうか。

Cで囲まれた曲面Sを貫く磁束が増加するとき，Cの外部から内部へ磁束が入ってきて，Cを磁束が切ることにより，Cに誘導起電力が生じる。このとき，Cと共に静止している

電荷は磁場に対して相対的に動き，電荷は磁場からローレンツ力を受け，このローレンツ力が誘導起電力を引き起こす。第４章で説明した電場と磁場の定義に従えば，磁場は静止した観測者(座標系α)に対して動いているが，電荷は静止しているので，電荷には磁場からローレンツ力ははたらかないことになる。したがって，いま考えた電荷にはたらく力は，そこに電場が生じているためである。この電場が誘導電場である。一方，磁場と共に動いている観測者(座標系β)からみると，電荷は速度をもっているので，電荷には磁場からローレンツ力がはたらく。

α系で生じている電場(誘導電場)の起源を考えるには，磁場を生じさせているもとのところを考える必要がある。そこを考えるために，問題を単純化し，高校の物理の電磁誘導のところでよく取り上げられる次の例を考察しよう。

例　一様な磁場中を運動する導体棒

図５－12 のように，真空中に，鉛直下向きに一様な磁束密度の大きさBの磁場がかけられている。いま，長さlの導体棒ＰＱが，ＰＱと垂直な方向へその姿勢を保ったまま，一定の速さvで水平面上を図の右方向へ動いている。このとき，導体棒にはＰ→Ｑの向きに大きさvBlの誘導起電力が生じている。

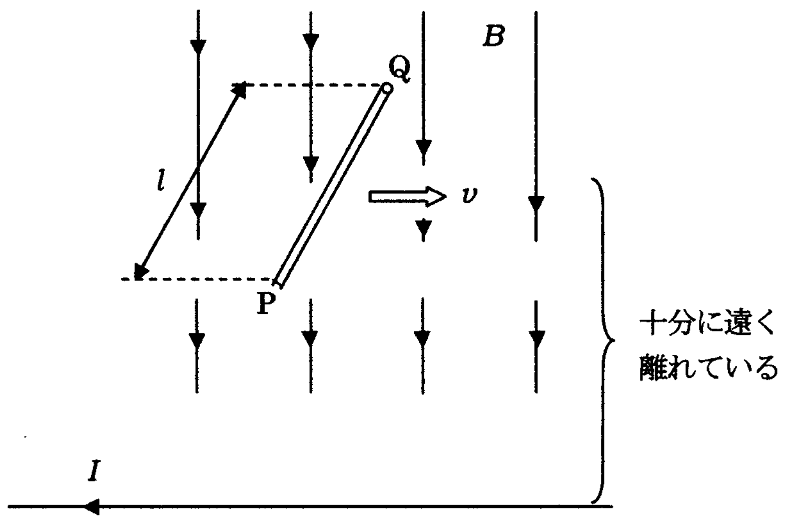

図５－12

いま，導体棒中の正電荷qが導体棒と共に速さvで右方向へ動いているとすると，qには磁場からqvBの大きさのローレンツ力がＰ→Ｑの向きにはたらくので，qはＱに集まり，Ｑは正に帯電する。一方，Ｐは正の電荷が不足し負に帯電する。そうすると，導体棒中には，正に帯電したＱから負に帯電したＰに向かって静電場(クーロン電場)が発生する。少し時間が経てば，Ｐ，Ｑ間に残っている電荷に磁場からはたらくローレンツ力と静電場からはたらく静電気力がつり合う。このとき，Ｐ，Ｑ間に生じている静電場の強さをEとすると，

$$qE = qvB$$

が成り立ち，

$$E = vB$$

となる。

上の考察は静止系αで見たものである。導体棒と共に右方向へ速さvで動いている座標系βでみると，導体棒中の電荷は静止しているので，磁場から力ははたらかず，電荷には，P→Qの向きに生じる誘導電場からの力とQ→Pの向きに生じる静電場からの力がはたらきつり合う。

さて，誘導電場の起源を考えよう。鉛直下向きに磁場ができるためには，どこかに電流が流れているはずである。いま，導体棒ＰＱと同じ水平面上で，ＰＱから十分遠く離れたところにＰＱの速度に平行な直線導線中を左向きに電流Iが流れており，Iが導体棒の位置にほぼ一様な磁場を鉛直下向きにつくっているとする。ここで，§４－２の議論を思いだそう。

電流Iの流れている導線はα系では，任意の点で正イオンの電荷と電子の負電荷が完全に打ち消し合い，中性を保っておりその周囲に電場はできていない。β系では，相対論による長さの縮みを考慮すると，導線は正に帯電し，周囲に電場をつくる。この電場が導体棒をβ系でみたときP→Qの向きに生じている電場，すなわち，誘導電場に他ならない。したがって，導体棒をβ系でみたとき，Qに正電荷が集まることによって生じたQ→Pの向きの電場と，Iの流れている導線が正に帯電することによって生じたP→Qの向きの電場が打ち消し合い，P，Q間の電場は0になっている。このとき，電荷は静止しているので，磁場から力ははたらかず，電荷にはたらく力は0である。

微分形式

前節で，アンペールの法則の積分形式(5－12ａ)から微分形式(5－13ａ～ｄ)を導いたのと全く同様に，電磁誘導の法則も積分形式から微分形式を導くことができる。すなわち，(5－12ａ)式と(5－15)式を比較して，$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{E}$，$\mu_0\boldsymbol{j}\to-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}$と置き換えればよい。こうして，微分形式の電磁誘導の法則のx成分，y成分，z成分は，それぞれ

$$\boxed{\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}} \qquad (5-16\,\mathrm{a})$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}} \qquad (5-16\,\mathrm{b})$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}} \qquad (5-16\,\mathrm{c})$$

となる。これらは，まとめて

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (5-16\,\mathrm{d})$$

と表される。