

§ 4-4 電磁場のローレンツ変換

§ 4-1 で説明したように、電場と磁場は相対的なものであり、観測者、すなわち、座標系によって異なる。本節では、 α 系での電磁場と、 α 系に対し x 軸方向へ速度 v で等速運動している β 系での電磁場の間の関係を求めよう。第2章で説明した α 系と β 系での時間と座標の間の関係をローレンツ変換と呼ぶのと同様に、電磁場の間の関係も、最初ローレンツによって導かれたので、ローレンツ変換と呼ばれる。

ここで電磁場のローレンツ変換を導くときに用いる指導原理は、次のようなものである。座標系 α での電場 \mathbf{E} と磁場(磁束密度) \mathbf{B} は電荷にはたらく電磁気力のもとになるものであり、 α 系に対し、電荷 q が速度 \mathbf{v} で動いているとき、 q にはたらく電磁気力(ローレンツ力) $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$ は、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4-5)$$

で与えられる。また、座標系が α 系から β 系へ移ると、電磁気力 $\mathbf{F}'=(F'_x, F'_y, F'_z)$ は力の変換則にしたがって変換される。力の変換則は、 β 系で点電荷が静止している場合(β 系は瞬間静止系)、

$$F'_x = F_x \quad (3-35)$$

$$F'_y = \gamma(v)F_y \quad (3-39)$$

$$F'_z = \gamma(v)F_z \quad (3-39)'$$

で与えられる。ここで、空間の対称性より、力の y 成分と z 成分の変換は等しい。

ある瞬間、点電荷が α 系で x 軸方向へ速度 v_x 、 β 系で x' 軸方向へ速度 v'_x をもっている場合(すなわち、 β 系が瞬間静止系ではない場合)でも、(3-35)式から力の x 成分は、 α 系と β 系で等しいことには変わりはない。

y 、 z 成分の変換は次のように求めることができる。第3章で説明したように、運動量を時間で微分したものが力であり、本節末の(注)で示すように、運動量の y 、 z 成分は、 α 系でも β 系でも等しい。すなわち、 $p'_y = p_y$ 、 $p'_z = p_z$ が成り立つ。力の y 成分の変換は、時間のローレンツ変換(1-7 a)を用いて、

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{F_y}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \quad (4-18a)$$

となる。同様に、 z 成分の変換は、

$$F'_z = \frac{F_z}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \quad (4-18b)$$

である。

α 系での電場と磁束密度を $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ と $\mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$, β 系でのものを $\mathbf{E}'=(E'_x, E'_y, E'_z)$ と $\mathbf{B}'=(B'_x, B'_y, B'_z)$ とする。§ 4-1 で述べたように, 電荷 q は, 座標系の変換によって変化しない。

(1) 電場の x 成分

図 4-7 (A) のように, α 系で x 軸方向へ一様な電場 $E_x (E_y = E_z = 0)$ がかけられ, 磁場はかけられていない。その中を点電荷 q が x 軸方向へ速度 v で動いているとき, q にはたらく電磁気力は,

$$\begin{cases} F_x = qE_x \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

である。

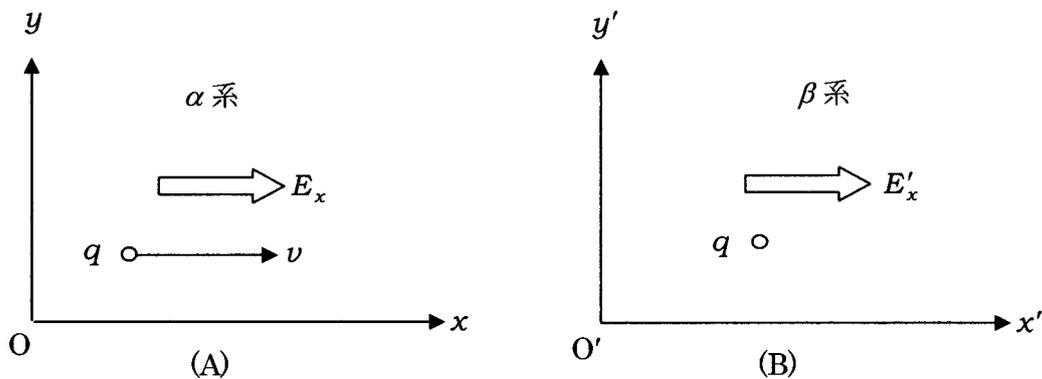


図 4-7

α に対して速度 v で x 軸方向へ動いている β 系(図 4-7 (B))で, 電荷 q にはたらく x 軸方向の力を考える。 β 系で q は静止しているので, 磁場が存在したとしても力にはたらかない。電場の x 成分 E'_x から q に,

$$F'_x = qE'_x \quad (4-20)$$

の力が x 軸方向へはたらく。

電場の y 成分 E'_y , z 成分 E'_z が存在したとしても, これらの電場は, 電荷 q に x 軸方向の力を及ぼさない。(4-19)式と(4-20)式を比較して力の変換則(3-35)を用いると, β 系での電場の x 成分は,

$$\boxed{E'_x = E_x} \quad (4-21)$$

と書ける。すなわち, 電場の x 成分は, α 系と β 系で等しい。

(2) 電場の y 成分

図4-8(A)のように、 α 系で y 軸方向へ一様な電場 E_y ($E_x = E_z = 0$)、が、 z 軸方向へ一様な磁場(磁束密度) B_z ($B_x = B_y = 0$) がかけられている。その中を点電荷 q が x 軸方向へ速度 v で動いているとき、 q にはたらく電磁気力は、

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = q(E_y - vB_z) \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (4-22)$$

である。

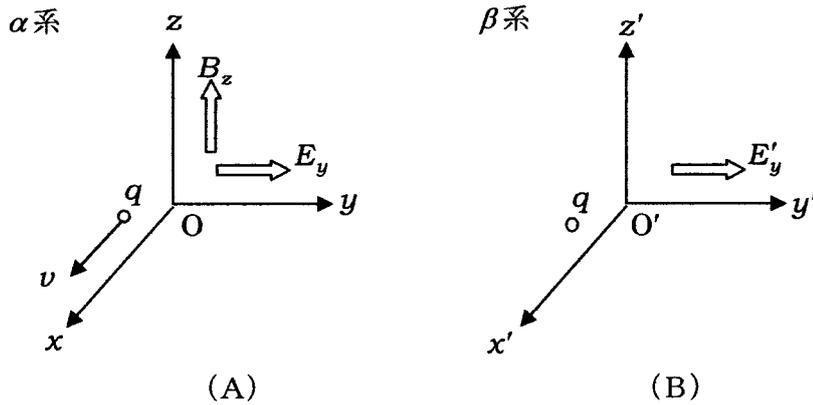


図4-8

β 系(図4-8(B))で電荷 q にはたらく y 軸方向の力を考える。 β 系で q は静止しているので、磁場から力ははたらかない。電場の y 成分 E'_y から q に、

$$F'_y = qE'_y \quad (4-23)$$

の力が y 軸方向へはたらく。

電場の x 成分 E'_x 、 z 成分 E'_z が存在したとしても、これらの電場は、電荷 q に y 軸方向の力を及ぼさない。(4-22)式と(4-23)式を比較して力の変換則(3-39)を用いると、 β 系での電場の y 成分は、

$$\boxed{E'_y = \gamma(v)(E_y - vB_z)} \quad (4-24)$$

と書ける。

(3) 電場の z 成分

図4-9(A)のように、 α 系で y 軸方向へ一様な磁場(磁束密度) B_y ($B_x = B_z = 0$) と、 z

軸方向へ一様な電場 E_z ($E_x = E_y = 0$) がかけられている。その中を点電荷 q が x 軸方向へ速度 v で動いているとき、 q にはたらく電磁気力は、

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = q(E_z + vB_y) \end{cases} \quad (4-25)$$

である。

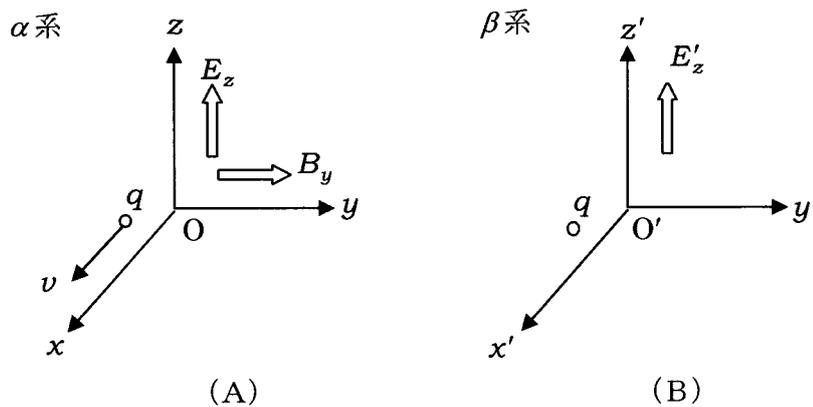


図 4-9

β 系(図 4-9(B))で電荷 q にはたらく z 軸方向の力を考える。 β 系で q は静止しているので、磁場から力のはたらかない。電場の z 成分 E'_z から q に、

$$F'_z = qE'_z \quad (4-26)$$

の力が z 軸方向へはたらく。

電場の x 成分 E'_x 、 y 成分 E'_y が存在したとしても、これらの電場は、電荷 q に z 軸方向の力を及ぼさない。(4-25)式と(4-26)式を比較して力の変換則(3-39)を用いると、 β 系での電場の z 成分は、

$$\boxed{E'_z = \gamma(v)(E_z + vB_y)} \quad (4-27)$$

と書ける。

(4) 磁場の x 成分

図 4-10(A)のように、 α 系で x 軸方向へ一様な磁場(磁束密度) B_x ($B_y = B_z = 0$) がかけられ、電場はかけられていない。その中を点電荷 q が xy 面に平行に速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$ で動いているとき、 q にはたらく電磁気力は、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z &= -qv_y B_x \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

である。

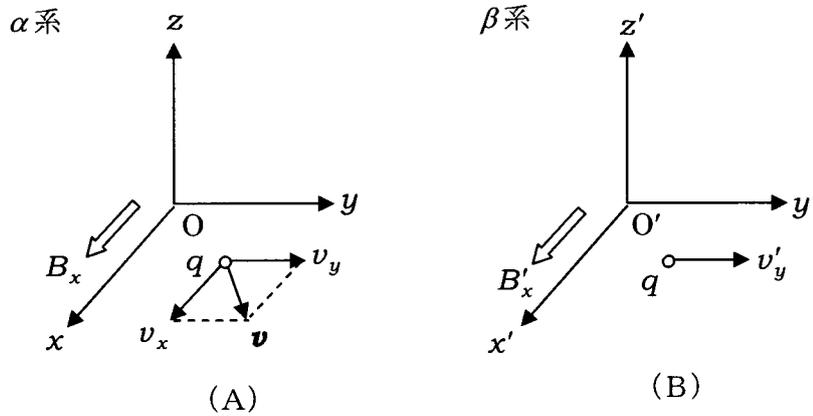


図 4-10

β 系(図 4-10(B))で電荷 q にはたらく z 軸方向の力を考える。 β 系で q は y 軸方向へ速度 v'_y で動いているので、磁束密度の x 成分 B'_x から q に、

$$F'_z = -qv'_y B'_x \quad (4-29)$$

の力が z 軸方向へはたらく。ここで、 v_y と v'_y の関係は、速度の変換則(2-36b)式で $v'_x = 0$ とおいて、

$$v'_y = \gamma(v)v_y \quad (4-30)$$

となる。

電場の x 成分 E'_x 、 y 成分 E'_y および磁束密度の y 成分 B'_y 、 z 成分 B'_z が存在したとしても、これらの電場と磁場は、電荷 q に z 軸方向の力を及ぼさない。また、電場の z 成分は、 α 系で $E_z = B_y = 0$ であるから、(4-27)式より、 $E'_z = 0$ である。したがって、 q は電場から z 軸方向の力を受けない。(4-28)式と(4-29)式を比較し、(4-30)式および力の変換則(3-39)を用いると、 β 系での磁束密度の x 成分は、

$$\boxed{B'_x = B_x} \quad (4-31)$$

と書ける。すなわち、磁場の x 成分は α 系と β 系で同じである。

(5) 磁場の y 成分

図4-11(A)のように、 α 系で y 軸方向へ一様な磁場(磁束密度) B_y ($B_x = B_z = 0$) と、 z 軸方向へ一様な電場 E_z ($E_x = E_y = 0$) がかけられている。その中を点電荷 q が x 軸方向へ速度 v_x で動いているとき、 q にはたらく電磁気力は、

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = q(E_z + v_x B_y) \end{cases} \quad (4-32)$$

である。

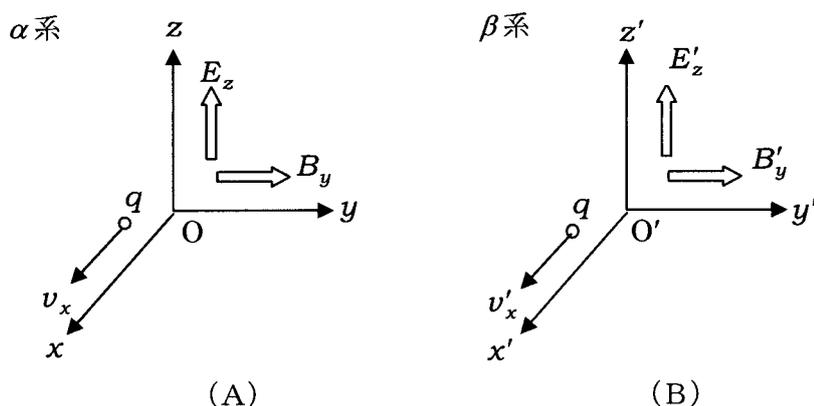


図4-11

β 系(図4-11(B))で電荷 q にはたらく z 軸方向の力を考える。 β 系で q は x 軸方向へ速度 v'_x で動いているので、磁束密度の y 成分 B'_y と電場の z 成分 E'_z から q に、

$$F'_z = q(E'_z + v'_x B'_y) \quad (4-33)$$

の力が z 軸方向へはたらく。ここで、 v_x と v'_x の関係は、速度の変換則

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \quad (2-35a)$$

で与えられる。

β 系で電場の x 成分 E'_x 、 y 成分 E'_y および磁束密度の x 成分 B'_x 、 z 成分 B'_z が存在したとしても、これらの電場と磁場は電荷 q に z 軸方向の力を及ぼさない。(4-32)式と(4-33)式を比較し、(2-35a)、(4-27)式および力の変換則(4-18b)を用いると、 β 系での磁束密度の y 成分は、

$$B'_y = \gamma(v) \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \quad (4-34)$$

と書ける。

(6) 磁場の z 成分

図4-12(A)のように、 α 系で y 軸方向へ一様な電場 E_y ($E_x = E_z = 0$) と、 z 軸方向へ一様な磁場(磁束密度) B_z ($B_x = B_y = 0$) がかけられている。その中を点電荷 q が x 軸方向へ速度 v_x で動いているとき、 q にはたらく電磁気力は、

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = q(E_y - v_x B_z) \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (4-35)$$

である。

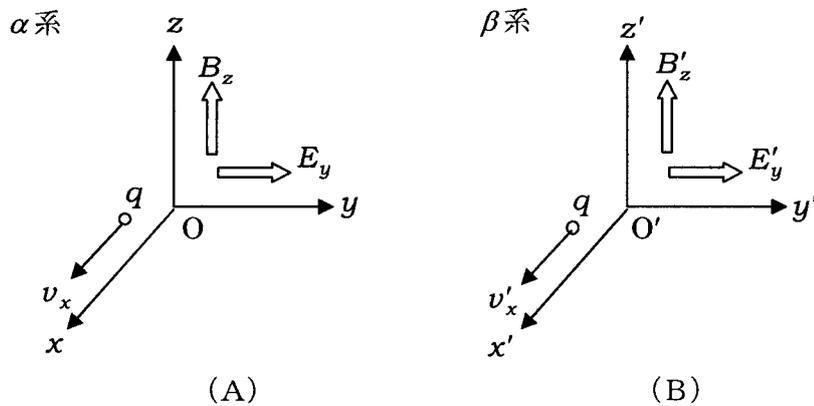


図4-12

β 系(図4-12(B))で電荷 q にはたらく y 軸方向の力を考える。 β 系で q は x 軸方向へ速度 v'_x で動いているので、電場の y 成分 E'_y と磁束密度の z 成分 B'_z から q に、

$$F'_y = q(E'_y - v'_x B'_z) \quad (4-36)$$

の力が y 軸方向へはたらく。

電場の x 成分 E'_x 、 z 成分 E'_z および磁束密度の x 成分 B'_x 、 y 成分 B'_y が存在したとしても、これらの電場と磁場は電荷 q に y 軸方向の力を及ぼさない。(4-35)式と(4-36)式を比較し、(2-35a)、(4-24)式および力の変換則(4-18a)を用いると、 β 系での磁束密度の z 成分は、

$$B'_z = \gamma(v) \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \quad (4-37)$$

と書ける。

(注)

一般に、粒子が x 軸方向だけではなく、 y 軸方向(z 軸方向)の速度成分をもつとき、 α 系での運動量の y 成分 p_y (z 成分 p_z) と、 α 系に対し x 軸方向へ速度 v で等速運動している β 系での運動量の y 成分 p'_y (z 成分 p'_z) は常に等しい。このことは、次のように示される(図 a)。

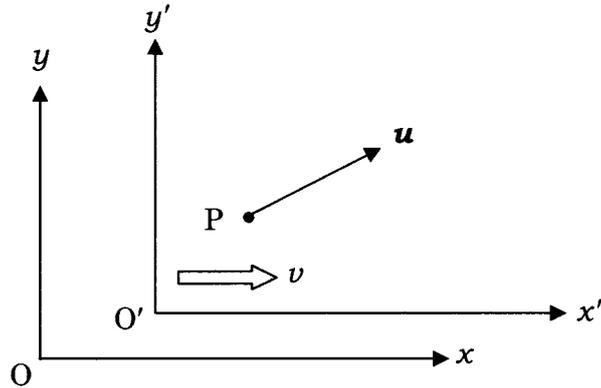


図 a

α 系での粒子 P の速度を $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$, β 系での粒子 P の速度を $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, 0)$ とする

と、 α 系と β 系での運動量の y 成分 p_y, p'_y は、それぞれ(3-30)式より、

$$p_y = \gamma(u) m u_y \quad (1)$$

$$p'_y = \gamma(u') m u'_y \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $\gamma(u)$ と $\gamma(u')$ は、

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \gamma(u') = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

であり、 $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2$ である。また、 u'_x , u'_y は、(2-35a), (2-36a) 式より、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad (3)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad (4)$$

と書かれる。

これらより、以下のように $p'_y = p_y$ が導かれる。

まず β 系における $\gamma(u')$ を α 系における $\gamma(u)$ で表す。③、④式から、

$$1 - \frac{u_x'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{u_y'^2}{c^2} = \frac{\frac{u_y^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

を得る。これらより、

$$1 - \frac{u_x'^2}{c^2} - \frac{u_y'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

となるので、

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \quad \text{⑤}$$

が成り立つ。次に④、⑤式を②式へ代入して、 $p_y' = p_y$ を得る。

また、 y 軸と z 軸の対称性から $p_z' = p_z$ を得る。

§ 4-5 動いている電荷のつくる電場

図 4-13 のように、点電荷 q が原点 O に静止しているとき、 OP 間の距離を r 、 O と x 軸、 y 軸、 z 軸のなす角を、それぞれ、 α 、 β 、 γ とすると、(4-3) 式と関係

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \cos \beta \\ z = r \cos \gamma \end{cases}$$

を用いて、点 $P(x, y, z)$ にできる電場

$\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ は、

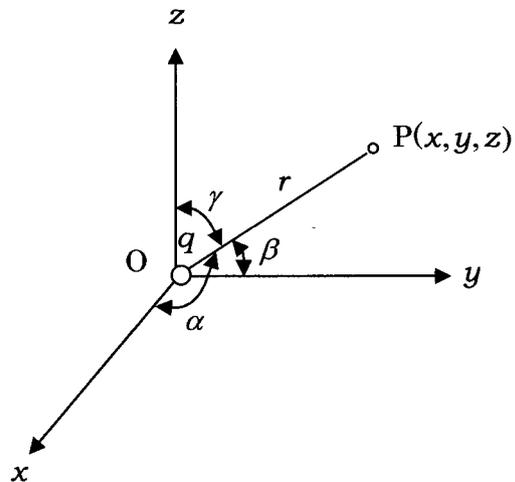


図 4-13

$$\begin{cases} E_{0x} = k \frac{q}{r^2} \cos \alpha = k \frac{q}{r^3} x \\ E_{0y} = k \frac{q}{r^2} \cos \beta = k \frac{q}{r^3} y \\ E_{0z} = k \frac{q}{r^2} \cos \gamma = k \frac{q}{r^3} z \end{cases} \quad (4-38)$$

と書ける。

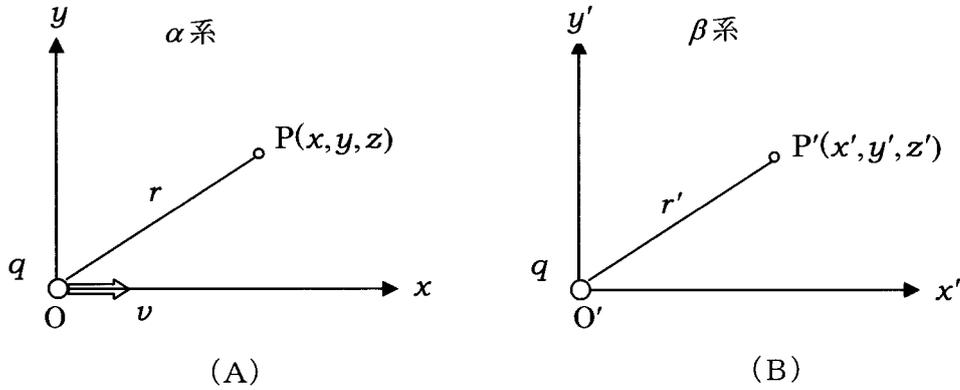


図4-14

一方、図4-14(A)のように、 α 系で、 x 軸方向へ速度 $v (> 0)$ で等速運動している点電荷 q が、時刻 $t=0$ に原点 O にあるとき、点 $P(x, y, z)$ にできる電場は、電磁場のローレンツ変換を用いて求めることができる。時刻 $t=t'=0$ に原点 O と O' が一致し、 α 系に対して x 軸方向へ速度 v で等速運動している β 系では、 q は原点 O' に静止している。

図4-14(B)のように、 β 系で、点 $P'(x', y', z')$ にできる電場 $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$ は、 $O'P'$ と x' 軸、 y' 軸、 z' 軸のなす角を、それぞれ、 α', β', γ' とすると、(4-38)式と同様な式で表される。

$$\begin{cases} E'_x = k \frac{q}{r'^3} x' \\ E'_y = k \frac{q}{r'^3} y' \\ E'_z = k \frac{q}{r'^3} z' \end{cases} \quad (4-39)$$

ここで、点 O' と P' の距離 r' は、時刻 $t=0$ における座標のローレンツ変換

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (4-40)$$

を用いて、

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma(v)^2 x^2 + y^2 + z^2} \quad (4-41)$$

となる。

β 系で磁場は存在しない($B'_x = B'_y = B'_z = 0$)ので、電場のローレンツ変換(4-21), (4-24), (4-27)を逆に用いて(\mathbf{E} と \mathbf{E}' , \mathbf{B} と \mathbf{B}' を交換し, $v \rightarrow -v$ とする), (4-39)式, (4-40)式を代入すると, α 系での点Pの電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ は,

$$\begin{cases} E_x = E'_x = \gamma(v)k \frac{q}{r'^3} x \\ E_y = \gamma(v)E'_y = \gamma(v)k \frac{q}{r'^3} y \\ E_z = \gamma(v)E'_z = \gamma(v)k \frac{q}{r'^3} z \end{cases} \quad (4-42)$$

となる。ここで, $\gamma(-v) = \gamma(v)$ を用いた。

(4-41)式を考慮して(4-38)式と(4-42)式を比較すると, 次のことがわかる。

点電荷 q が x 軸上を速度 v で動くと, 静止している場合に比べ, x 軸上($y = z = 0$, 速度の前方および後方)の電場は, $\frac{1}{\gamma(v)^2}$ (< 1)倍に弱くなり, y, z 軸上($x = 0$, 速度に垂直な方向)の電場は, $\gamma(v)$ (> 1)倍に強められる。