第４章　荷電粒子にはたらく力　１

§４－１　はじめに

高校の物理で習う電磁気(19 世紀の古典電磁気学)において，電荷にはたらく電磁気力は，電場(電界)からはたらくクーロン力(静電気力)と電荷が動いているときに磁場(磁界)からはたらくローレンツ力(磁気力)の２力である。

クーロン力

2 つの点電荷の間にはたらく力を与える法則に，クーロンの法則がある。クーロンの法則は，高校の物理において次のように習う。真空中におかれた２つの点電荷の間にはたらく力の大きさFは，電荷の積に比例しその間の距離の２乗に反比例する。すなわち，点電荷q_1, q_2が距離r離れておかれているとき，比例定数をkとして，Fは，

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (4-1)$$

と表される(図４－１)。向きは，q_1とq_2が同符号のとき，互いにしりぞけ合い，q_1とq_2が異符号のとき，互いに引き合う。

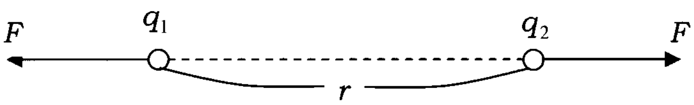


図４－１

次に，電場は静止している単位電荷にはたらく電磁気力として定義される。すなわち，電荷qに電場$\boldsymbol{E}$から力$\boldsymbol{F}(|\boldsymbol{F}| = F)$がはたらくと，

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \qquad (4-2)$$

が成り立つ。したがって，点電荷q_1が距離r離れた点(q_2のおかれている点）につくっている電場の強さEは，

$$E = \frac{F}{q_2} = k\frac{q_1}{r^2} \qquad (4-3)$$

となる。

ローレンツ力(磁気力)

高校の物理で習うように，点電荷qが磁束密度$\boldsymbol{B}$の磁場中を速度$\boldsymbol{v}$で動いていると，qには,

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad (4-4)$$

の力がはたらく。ここで，真空中の磁束密度$\boldsymbol{B}$は，真空の透磁率をμ_0とすると，磁場$\boldsymbol{H}$を用いて$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$で定義される。また，$\boldsymbol{H}$は単位磁荷にはたらく電磁気力として定義される。

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積(外積)といわれる。その大きさは $|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ (θ:$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{B}$のなす角)で，その向きはフレミングの左手の法則(中指の向きに$\boldsymbol{v}$，人差し指の向きに$\boldsymbol{B}$をとったとき，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$は親指の向きになる。図4－2(A))で与えられる。またこの関係は，空間座標(x,y,z)において，$\theta=90°$のとき，$\boldsymbol{v}$はx軸方向，$\boldsymbol{B}$はy軸方向，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$は$z$軸方向になる(図4－2(B))。

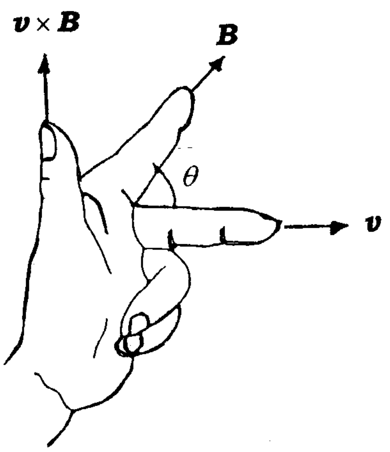


図4－2(A)

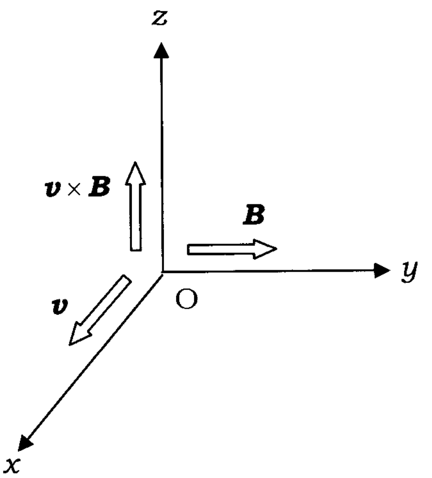
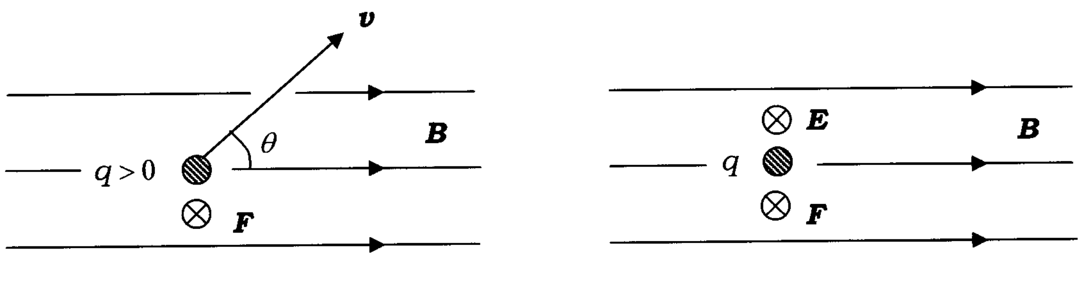


図4－2(B)

(4－4)式に現れる電荷qの速度$\boldsymbol{v}$は，何に対する速度であろうか。$\boldsymbol{v}$は，観測者すなわち座標系に対する速度である。



(A)　(B)

図4－3

ある観測者(座標系)から見て，紙面の右向きに磁束密度$\boldsymbol{B}$の磁場がかけられている中を，正電荷qが$\boldsymbol{B}$に対して角θの向きに速度$\boldsymbol{v}$で動いているとき，(4－4)式によれば，qには，大きさ$|\boldsymbol{F}|=q|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$の力が紙面の表から裏の向きにはたらく(図4－3(A))。この運動をqと共に動いている観測者が眺めると，qにはたらく力はどうなるのであろうか。速度$\boldsymbol{v}$が観測者すなわち座標系に対する速度とすると，qの観測者に対する速度が0となれば，qに磁場から力ははたらかない。しかし，静止している観測者から見ると電荷に力がはたらくのに，動いている観測者から見ると力がはたらかないというようなことが起き

るであろうか。実際には，qに電磁気的な力がはたらく。この力は電場からはたらくもの以外にはありえない。すなわち，qと共に動いている観測者(座標系)にとっては，静止した観測者に対して存在しなかった電場が生じていることになる(図4－3(B))。したがって，電場および磁場は観測者すなわち座標系によって異なるものであり，絶対的なものではないことがわかる。

電場$\boldsymbol{E}$は，電荷の速度とは無関係に電荷にはたらく電磁気力のもとになるものであり，磁場(磁束密度$\boldsymbol{B}$)は，電荷の速度によって生じる電磁気力のもとになるものであるとみなすことができる。したがって，点電荷qに電場と磁場からはたらく電磁気力$\boldsymbol{F}$は，

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (4-5)$$

と表され，(4－5)式で表される力を一般的に，ローレンツ力(電磁気力)という。ただし，電荷qは，観測者(座標系)によらず不変である。なぜなら，質量と同様，電荷は座標系(観測者)によらず物質に固有な物理量であるからである[1]。

以上のような電場と磁場を，相対論の立場から，詳しく考察してみよう。

§4－2　電流が電荷に及ぼす力

真空中で，直線導線に一定の電流が流れているとき，導線と平行に動いている電荷に働く力を考えよう。

いま，α系で一定の電流がx軸負方向へ流れている直線導線がx軸上にあり，導線全体で電気的中性を保っているとする。この導線はα系で，図4－4(A)のように，正電荷$+e$をもつイオンが等間隔aを保って静止しており，その中を負電荷$-e$をもった電子が，やはり等間隔aを保ちながら，速度vでx軸正方向へ等速運動している。α系に対し，x軸方向へ速度vで等速運動している正の点電荷qが，この導線からyだけ離れた点Pにいるとき，qにはたらく電磁気力を考える。

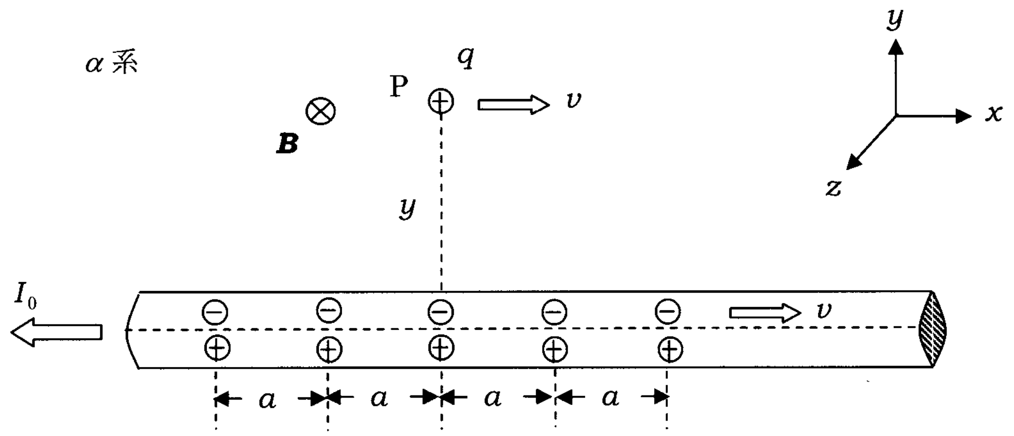


図4－4(A)

α系で，導線内の正イオン線密度(正イオンが単位長さ当たりにもつ電気量)を$\rho_0\left(=\dfrac{e}{a}\right)$，電子線密度（電子が単位長さ当たりにもつ電気量）を$-\rho_0$とすると，間隔aが十分に小さ

---

[1] 電荷が座標系によらない物質に固有な物理量であることは，多くの実験で確かめられている。

い$(a \to 0)$とき，導線の電荷密度はどこでも 0 であるから，導線から周囲に電場は生じない。したがって，qにはたらく静電気力は0である。一方，電流の強さは，導線の１つの断面を単位時間に通過する電気量であるから，$I=\rho_0 v$と書ける。導線から点Pに向かう向きをy軸正の向きとすると，この直線電流が点Pにつくる磁場は，その磁束密度を$\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$とおくと，その向きが紙面表から裏の向き，すなわち，z軸負方向であることに注意して，

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi y} = -\dfrac{\mu_0 \rho_0 v}{2\pi y} \end{cases} \qquad (4-6)$$

と書ける。(4－6)式で与えられる磁場中を，電荷qが速度vでx軸方向へ動いているので，この電子にはたらく力$\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$は，

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = \dfrac{\mu_0 \rho_0 q v^2}{2\pi y} \\ F_z = 0 \end{cases} \qquad (4-7)$$

となる。

次に，α系に対してx軸方向へ速度vで等速運動しているβ系(x', y', z')で考えよう。β系では，図４－４(B)のように，導線内の負電荷をもつ電子は静止し，正電荷をもつイオンがx軸負方向へ，速さvで等速運動している。したがって，導線にはx軸負方向へ電流が流れており，この電流が導線の周囲に磁場をつくっている。ところが，導線外のqは静止しているため，磁場からは力を受けない。それでは，qに電磁気的な力ははたらかないのであろうか。

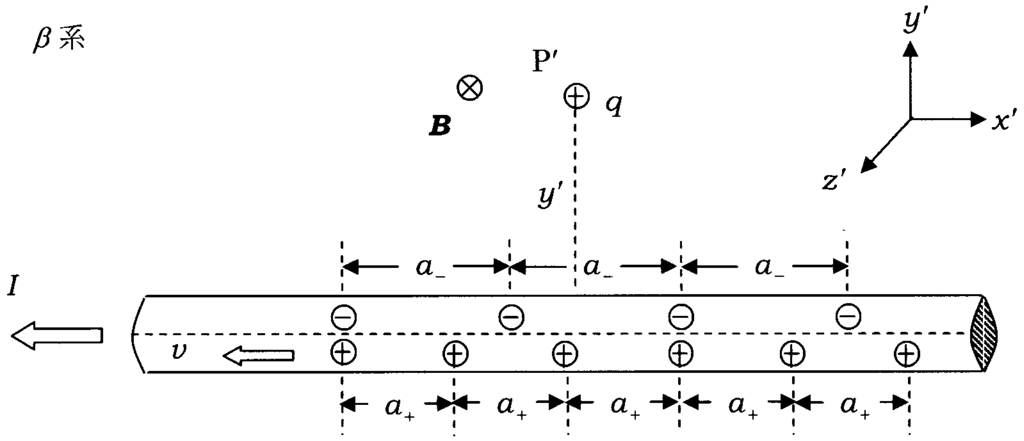


図４－４(B)

β系で，導線から$y'=y$だけ離れた点P′にあるqにはたらく力$\boldsymbol{F}'=(F'_x, F'_y, F'_z)$は，$\alpha$系ではたらく力(4－7)に，力の変換則

$$F'_x = F_x \tag{3－35}$$

および

$$F'_y = \gamma(v) F_y \tag{3－39}$$

を用いて求められるはずである[2)]。

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = \gamma(v)F_y = \gamma(v)\dfrac{\mu_0 \rho_0 q v^2}{2\pi y} \\ F'_z = 0 \end{cases} \tag{4－8}$$

いま，点P′の電荷qは静止しているのであるから，qにはたらく電磁気力は静電気力，すなわち，電場からの力だけである。すなわち，β系では，点P′に$E'_y = \dfrac{F'_y}{q}$で与えられる電場が生じていなければならない。このような電場はなぜ生じるのであろうか。

はじめに仮定したように，α系では，導線内の正イオンと電子は同じ間隔aで並び，電荷を互いに打ち消しあい，導線は任意の点で完全に中性である。β系ではどうであろうか。第2章で説明したように，速さvで動いている物体の長さは，$\dfrac{1}{\gamma(v)}$倍に縮んでいる。α系で電子は速さvで動いており，動いた状態で間隔がaになっているのであるから，電子が静止しているβ系での間隔a_-は$a_- = \gamma(v)a > a$である。一方，正イオンはβ系では速さvで動いており，静止しているα系での間隔がaであるから，β系での間隔a_+は$a_+ = \dfrac{a}{\gamma(v)} < a$である。したがって，$\beta$系で導線の任意の点は正に帯電し，周囲に電場をつくっている。

真空中で直線導線がその周囲につくる電場は，ガウスの法則を用いて求めることができる。無限に長い直線L上に線密度ρで分布した電荷が，Lからr離れた点につくる電場の強さEは，真空の誘電率をε_0とすると，

$$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{4－9}$$

となる。ガウスの法則については，第5章(§5－2)および付録［A］で，また，(4－9)式の導出を含むいくつかの例については，付録［A］で説明する。

β系での正イオン電荷線密度は$\gamma(v)\rho_0$であり，電子電荷線密度は$\dfrac{\rho_0}{\gamma(v)}$であるから，導線の総電荷線密度は$\rho_0\left(\gamma(v) - \dfrac{1}{\gamma(v)}\right)$となる。したがって，導線外の点P′にできる電場

---

2) 力の変換則（3－39）は，β系で，力のはたらく粒子（いまの場合，点電荷q）が静止していることに注意しよう。

$\boldsymbol{E}'=(E'_x, E'_y, E'_Z)$は，(4－9)式から，

$$\begin{cases} E'_x = 0 \\ E'_y = \dfrac{\rho_0\left(\gamma(v)-\dfrac{1}{\gamma(v)}\right)}{2\pi\varepsilon_0 y} \\ E'_z = 0 \end{cases} \tag{4－10}$$

となる。ここで，$y'=y$を用いた。したがって，点P′にある電荷qにはたらく静電気力$\boldsymbol{F}'=(F'_x, F'_y, F'_z)$は，

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = qE'_y = \dfrac{\rho_0\left(\gamma(v)-\dfrac{1}{\gamma(v)}\right)}{2\pi\varepsilon_0 y}q \\ F'_z = 0 \end{cases} \tag{4－11}$$

である。(4－11)式が，α系ではたらく力(4－7)に力の変換則を用いて得られた力(4－8)と一致することは，(4－11)式のF'_yを次のように変形することによってわかる。

$$\begin{aligned} F'_y &= \gamma(v)\frac{\rho_0\left(1-\dfrac{1}{\gamma(v)^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 y}q \\ &= \gamma(v)\frac{v^2}{c^2}\frac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \\ &= \gamma(v)\frac{\mu_0\rho_0 q v^2}{2\pi y} \end{aligned} \tag{4－8}$$

ここで，第5章で説明するように，真空中の光速(電磁波の速さ) cが，

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{4－12}$$

で与えられることをを用いた。

定量的な考察

β系で，点P′に静止している電荷qに力がはたらくのは，P′に電場$\boldsymbol{E}'$ができるためであり，$\boldsymbol{E}'$は導線が相対論的効果により帯電するためであった。それでは，この相対論的効果は，β系がα系に対してどの程度の速さをもつとき現れるのか，数値的に調べてみよう。

導線の断面積をS，導線中の電子の平均の速さをv，導線の単位体積中の電流に寄与する電子(自由電子)の数をn，電子の電荷を$-e$とすると，導線を流れる電流の強さIは，1つの断面を単位時間に通過する電気量として，

$$I=envS$$

と書ける。

導線に流れる電流として，日常生活で使われている程度のものを考えよう。銅(Cu)からつくられた断面積1 mm^2 の導線に，1 A の電流が流れているとする。いま，Cu 原子1個が1個の自由電子をもつとすると，Cu の原子量を 64，密度を $8.9 g/cm^3$，1 mol 中の原子数(アボガドロ数)を 6.0×10^{23} 個として単位体積中の自由電子数は，

$$n=\frac{6.0\times10^{23}}{\dfrac{64}{8.9}}\times10^{6}\fallingdotseq 8.3\times10^{28}〔個/m^3〕$$

となる。したがって，$e=1.6\times10^{-19}$〔C〕，$S=10^{-6}$〔m^2〕を用いて，導線中の電子の平均の速さを，

$$v=\frac{I}{enS}\fallingdotseq 7.5\times10^{-5}〔m/s〕$$

と得る。これは,「かたつむり」の動く速さより遅い。通常電流が流れているとき，電流と逆向きに動く電子の速さは大変小さい。

ニュートン力学は，通常我々が身近かに経験している速さにおいて正しく成り立つものであり，考察する速さが光速に近ずくと正しくなくなり，相対論を用いなければならない。相対論の効果は，光速に近い速さにおいて重要になるというのが，前章までの結論であった。しかし，いまの場合，$\dfrac{v^2}{c^2}\fallingdotseq 6\times10^{-26}$ という大変にゆっくりとした速さにおいても，相対論の効果が重要であり，相対論を用いなければ，上の現象を理解することはできない。これは，次のことを意味する。力学においては，相対論は光速に近い速さを考察するときのみ重要となるが，電磁気学においては，相対論はどんな速さにおいても重要である。もともと電磁気学は相対論的にできており，相対論をぬきに電磁気学を原理的なところから理解することはできない。アインシュタインは電磁気学を原理的に理解するために，相対論を考え出す必要があったのである。

§4－3　静電場を用いた磁場の導出

上で説明したように，電場と磁場は座標系により異なるのであるから，磁場は電場から導かれるのではないだろうか。

静止した電荷にはたらく力

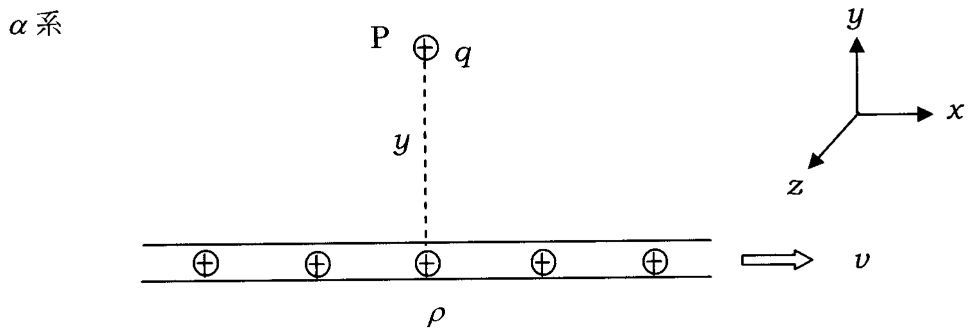


図4－5(A)

図4－5のように，十分に長い導線に静止した状態で線密度ρ_0の電荷を与えて，x軸方向(導線方向)へ速度vで等速運動させる。このとき，α系では導線は速度vでx軸方向へ動いており，電荷の線密度は$\rho\ (>\rho_0)$となる(図4－5(A))が，β系では導線は静止しているので，電荷の線密度はρ_0である(図4－5(B))。

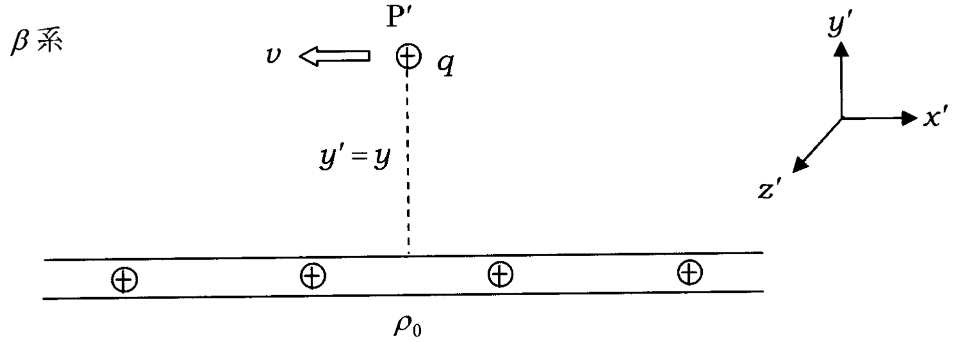


図4－5(B)

導線からy離れた点Pに点電荷qを静止させておいたとき，qにはたらく電磁気力を考えよう。

qは静止しているので，qには帯電した導線のつくる電場から静電気力のみがはたらく[3]。このとき，帯電した導線が静止しているときと，速度vで動いているときでは，点Pにできる電場は異なる。ガウスの法則(クーロンの法則)を用いて点Pの電場を求めるには，電場を生じさせている電荷が静止している座標系で考えなければならない。α系において，導線を静止させた状態で電荷線密度ρ_0に帯電させて速度vで動かせば，電荷線密度は，前節でのβ系での正イオン電荷線密度のときと同様に，$\rho=\gamma(v)\rho_0(>\rho_0)$と大きくなる。このとき，点Pにできる電場は，静止している線密度ρの電荷がつくる電場に等しいことが，次のようにしてわかる。

α系に対して，x軸方向へ速度vで等速運動しているβ系で考える(図4－5(B))。β系で，qはx軸負方向へ速さvで動いている。α系では導線を静止させて帯電させ，これをそのまま速度vで動かすのであるから，導線が静止しているβ系では，電荷線密度はρ_0である。このとき，導線から$y'=y$離　:点P′にできる電場の強さE'は，(4－9)式より，

$$E'=\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

となる。いま導線上の電荷は静止しているので，電流は流れておらず，点P′に磁場は生じていない。したがって，電荷qにはたらく電磁気力は，電場からはたらく静電気力のみである。電場から電荷にはたらく力は，電荷が動いているかどうかによらないので，qにはたらく力$\boldsymbol{F}'=(F'_x,F'_y,F'_z)$は，

[3] この場合，点Pに磁場は生じているが，点電荷qが静止しているので，qに磁気力ははたらかず，電磁気力として静電気力のみがはたらく。

$$
\begin{cases}
F'_x = 0 \\
F'_y = qE' = \dfrac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \\
F'_z = 0
\end{cases}
\qquad (4-13)
$$

と得られる。

(4 −13)式に力の変換則(3 −39)を適用する。このとき，q は α 系で静止しているので，(3 −39)式で，F_y と F'_y を交換し，$v \to -v$ として，α 系で q にはたらく電磁気力を $\boldsymbol{F}^e = (F^e_x, F^e_y, F^e_z)$ とおくと，

$$
\begin{cases}
F^e_x = 0 \\
F^e_y = \gamma(v) F'_y = \gamma(v) \dfrac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \\
F^e_z = 0
\end{cases}
\qquad (4-14)
$$

となる。ここで，$\gamma(-v) = \gamma(v)$ を用いた。(4 −14)式は，静止している電荷線密度 $\rho = \gamma(v)\rho_0$ の導線から，y 離れた点Pに静止している電荷 q にはたらく静電気力に等しい。したがって，点Pにできる電場は，静止している電荷線密度 ρ のつくる電場に等しい。

動いている電荷にはたらく力

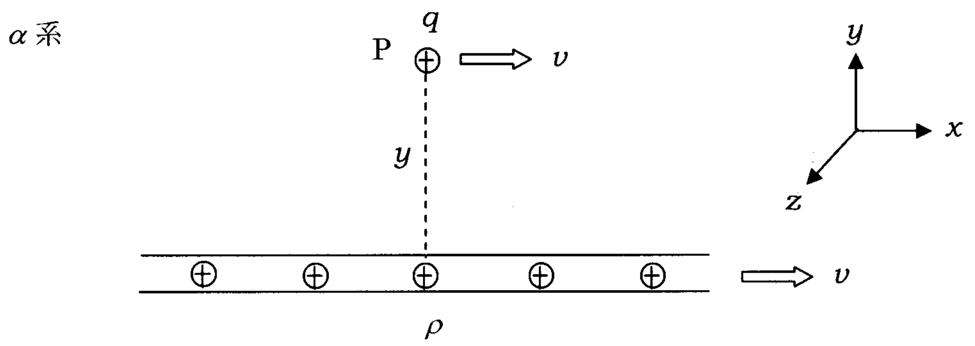


図4 −6 (A)

図4 −6 (A)のように，α 系において，十分に長い導線に静止した状態で線密度 ρ_0 の電荷を与えて，x 軸方向(導線方向)へ速度 v で等速運動させる。このとき，導線から y 離れた点Pを，x 軸方向へ速度 v で動いている点電荷 q にはたらく電磁気力を考えよう[4]。

[4] この場合，点Pに磁場が生じており，点電荷 q が動いているので，q には電磁気力として，静電気力と磁気力の両方がはたらいている。

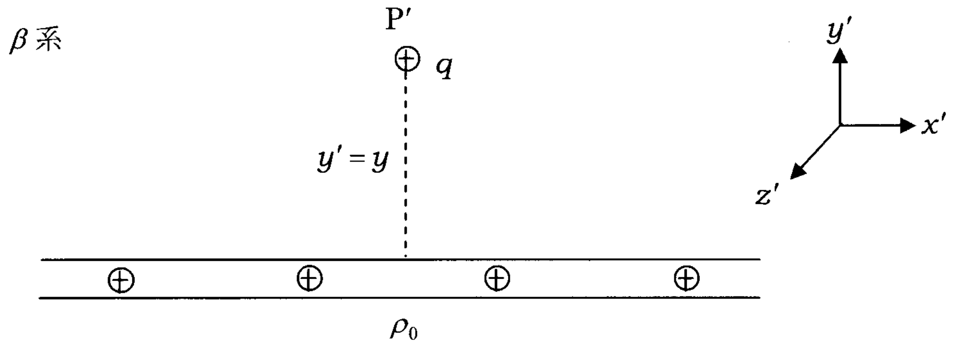


図4－6(B)

まず，α系に対しx軸方向へ速度vで等速運動しているβ系で考える(図4－6(B))。β系では，導線上の電荷は，線密度ρ_0で静止し，qも導線から$y'=y$離れた点P′に静止している。このとき，電荷qにはたらく電磁気力は，電場からはたらく静電気力のみである。したがって，qにはたらく力は，(4－13)式で与えられる。次に，力の変換則(3－39)を用いて，α系でqにはたらく力を求める。今度は，qはβ系で静止しているので，(4－13)式に(3－39)式をそのまま使うことができる。したがって，α系でqにはたらく電磁気力$\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$は，

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = \dfrac{F'_y}{\gamma(v)} = \dfrac{1}{\gamma(v)}\dfrac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \\ F_z = 0 \end{cases} \qquad (4-15)$$

となる。

磁場の導出

(4－14)式と(4－15)式の違いは，点電荷qが静止しているか，動いているかによる。したがって，その差は，電荷が動いていることによって生じる磁気力に等しい。よって，磁気力を$\boldsymbol{F}^m=(F_x^m, F_y^m, F_z^m)$とおくと，(4－12)式を用いて，

$$\begin{cases} F_x^m = F_x - F_x^e = 0 \\ F_y^m = F_y - F_y^e = \left(\dfrac{1}{\gamma(v)} - \gamma(v)\right)\dfrac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} = -\dfrac{\mu_0\gamma(v)\rho_0 q v^2}{2\pi y} \\ F_z^m = F_z - F_z^e = 0 \end{cases} \qquad (4-16)$$

を得る。

α系で，点Pに生じている磁場(磁気力のもとになっているもの)を求める。α系では，

導線の電荷線密度は，$\rho = \gamma(v)\rho_0$ であり，電流は，1 つの断面を単位時間に通過する電気量であるから，α 系で，帯電した動いている導線による電流の強さ I は，$I = \rho v$ と書ける。したがって，点Pの磁束密度の z 成分 B_z は，（4－4)式より，

$$F_y^m = -qvB_z$$

とおいて，

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \qquad (4-17)$$

となる。ここで，磁束密度の x 成分 B_x，y 成分 B_y は，$B_x = B_y = 0$ である。

（4－17)式は，高校の物理で習う「x 軸方向へ強さ I の電流が流れているとき，電流から y 離れた点Pにできる磁束密度」にほかならない。こうして，磁場(磁束密度)が，電場だけを用いて，相対論により導かれた。