

第3章 相対論的力学 2

§ 3-3 相対論的運動量

前節では、運動方程式を積分することによって、相対論的運動量とエネルギーの表式を導いたが、§ 3-1で相対論的運動方程式を定式化するとき、次節 (§ 3-4)で導かれる「力の x 成分(物体の速度方向の成分)は、ローレンツ変換で変化しない」という結果を用いた。

本節では、次節で一般的な力の変換則(「力の x 成分は、ローレンツ変換で変化しない」を含む)を導くための準備として、相対論的運動量の表式を、運動方程式を用いることなしに求めよう。ここでは、等質量の2粒子の相対的な運動を純粹に力学的に考察し、直接相対論的運動量を求める。

光速 c が無限大のとき、ローレンツ変換はガリレイ変換に帰着する。このことは、「 $c \rightarrow \infty$ のとき、相対論はニュートン力学に一致する」ということを表している。したがって、質量 m 、速度 \mathbf{v} の粒子の相対論的運動量 \mathbf{p} も、 $c \rightarrow \infty$ のとき、ニュートン力学における運動量 $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}$ に一致しなければならない。いま、 \mathbf{p}_0 は一意的(一通り)に表され、

速度 \mathbf{v} に平行である。一方、 \mathbf{p} も一意的に表されるとすると、 \mathbf{p} は \mathbf{v} と平行でなければならない。なぜならば、 \mathbf{p} が \mathbf{v} と平行ではなく、 \mathbf{p} が \mathbf{v} と θ の角をなしていたとすると、空間の対称性(空間は \mathbf{v} の方向には特別な性質をもっているが、 \mathbf{v} に垂直な方向には何ら特別な性質はもたず、どの方向も完全に同等である)より、 \mathbf{p}_1 でも \mathbf{p}_2 でも何でもよく(図 3-4)、 \mathbf{p} は一意的に書けないことになる。

そこで、相対論的運動量 \mathbf{p} を光速 c を用いて、

$$\mathbf{p} = \delta \left(\frac{v^2}{c^2} \right) m\mathbf{v} \quad (v = |\mathbf{v}|) \quad (3-24)$$

とおく。ここで、 \mathbf{p} と $m\mathbf{v}$ の比 δ は、空間の等方性(はじめの空間には何も特別な性質はなく、 \mathbf{v} はどの向きでも全く同等である)より、速度の大きさ $|\mathbf{v}|$ のみに依存するはずである

から、 $\frac{v^2}{c^2}$ の関数である。

ここで、

$$\delta(0) = 1 \quad (3-25)$$

とおく。

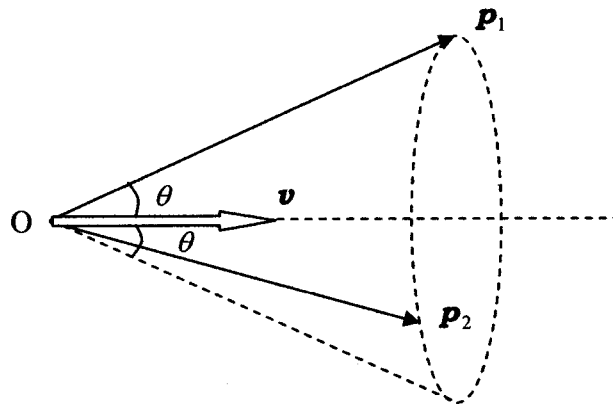


図 3-4

α 系

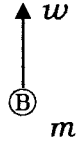
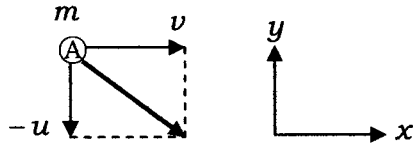


図3-5

β 系

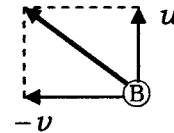
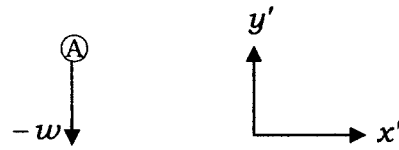


図3-6

図3-5, 3-6に示すように, 同じ質量 m の2つの粒子A, Bの相対的な運動を考える。運動は $x-y$ 平面上のものとする。いま, 粒子Bの速度の x 成分が0, および, 粒子AとBの運動量の y 成分の和が0となるように α 系をとり, 図3-5のように, α 系で, 粒子Aの速度を $(v, -u)$, 粒子Bの速度を $(0, w)$ とする。次に, α 系に対し x 軸方向へ速度 v で等速運動している β 系で, この運動をながめる。 β 系では, 粒子Aの速度の x 成分は0, 粒子Bの速度の x 成分は $-v$ となる。また, 粒子AとBの質量が等しいので, 粒子AとBを交換しても全く同じ運動となるはずである(すなわち, α 系と β 系で, 粒子AとBの運動エネルギーの和は等しく, 運動量の y 成分の和は0のままである)から, 粒子AとBの速度の y 成分は, α 系での速度の y 成分を入れ替えたものになる。したがって, 図3-6に示すように, β 系で粒子Aの速度は $(0, -w)$, 粒子Bの速度は $(-v, u)$ となる。

粒子AとBの運動量の y 成分の和が0であることから, 相対論的運動量の仮定(3-24)を用いて,

$$-\delta\left(\frac{u^2+v^2}{c^2}\right)mu + \delta\left(\frac{w^2}{c^2}\right)mw = 0 \quad (3-26)$$

が成り立つ。また, α 系と β 系で, 粒子Aの速度の y 成分は $-u$ と $-w$ であるが, これらの間には, 速度の y 成分の間の変換則(2-36b)が成り立つはずである。 β 系で粒子Aの速度の x 成分は0であるから, (2-36b)式で, $v_y = -u$, $v'_x = 0$, $v'_y = -w$ とにおいて,

$$u = \frac{w}{\gamma(v)} \quad (3-27)$$

となる。したがって, (3-26), (3-27)式より,

$$\frac{\delta\left(\frac{u^2+v^2}{c^2}\right)}{\delta\left(\frac{w^2}{c^2}\right)} = \frac{w}{u} = \gamma(v) \quad (3-28)$$

を得る。

(3-28)式から $\delta\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ の表式を求めるために、まず、 $u \rightarrow 0$ の極限を考えてみよう。

$u \rightarrow 0$ のとき、粒子AとBの運動量の y 成分の和が0であることから、 $w \rightarrow 0$ となる。このとき、(3-25)、(3-28)式より、

$$\delta\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (3-29)$$

が導かれる。次に、(3-29)式で与えられる $\delta\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ の表式が有限の u に対しても(3-28)

式を満たすことは、次式を用いると容易に示される。

$$\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - w^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{c^2} = 1 - \frac{v^2 + u^2}{c^2}$$

以上より、質量 m 、速度 \mathbf{v} の物体の相対論的運動量は、

$$\mathbf{p} = \gamma(v) m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (v = |\mathbf{v}|) \quad (3-30)$$

と表される。

§ 3-4 運動方程式と力

運動量と運動方程式

ニュートン力学で用いられている次の関係から、相対論における力(ニュートン力)を定義しよう¹¹⁾。

「ある時間の物体の相対論的運動量の変化は、

$$\text{この間に物体に加えられた力の力積に等しい} \quad (3-31)$$

時間 Δt の物体の相対論的運動量の変化を $\Delta \mathbf{p}$ 、加えられた力を \mathbf{F} とすると、関係(3-31)は、

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \cdot \Delta t$$

¹¹⁾ 相対論においては、第7章で説明するように、4次元ベクトルを用いて力(4元力)を定義することもある。そこで関係(3-31)あるいは(3-32)式から定義される力を4元力と区別して、ニュートン力という。ニュートン力は我々が日常使っている(高校の物理で用いる)力である。

となる。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta \mathbf{p} \rightarrow 0$ として、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3-32)$$

が成り立つ。(3-32)式を相対論的運動方程式と考え、この式によって力 \mathbf{F} を定義する。実際、ニュートン力学では、時刻 t において、質量 m 、速度 \mathbf{v} の物体に力 \mathbf{F} がはたらくとき、運動方程式は m を定数とすると

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \mathbf{F}$$

となる。ここで、 $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}$ はニュートン力学における物体の運動量である。

運動方程式(3-32)を加速度を用いて表そう。時刻 t において α 系に対する物体の速度を $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ 、加速度を $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 、物体にはたらく力を $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ 、物体の運動量を $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) (p_y = p_z = 0)$ とする。

速度方向の運動方程式と力

(3-30) 式より p_x が、

$$p_x = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

と表されることを用いて、運動方程式の x 成分は、

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} \\ &= \frac{ma_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m \frac{v^2}{c^2} a_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ &= ma_x \gamma(v)^3 \end{aligned} \quad (3-4)$$

となる。ここで、 $a_x = \frac{dv}{dt}$ である。

次に、 α 系に対し x 軸方向へ座標軸を平行に保ったまま速度 v で等速運動している β 系で、物体の運動を考えよう。時刻 t において、 β 系に対する物体の速度は 0 (β 系は物体に対し瞬間静止系) であるから、 β 系ではニュートンの運動方程式がそのまま成り立つ。したがって、 β 系での物体の速度、加速度、物体にはたらく力をそれぞれ $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ (この瞬間、 $\mathbf{v}' = 0$)、 $\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$ 、 $\mathbf{F}' = (F'_x, F'_y, F'_z)$ とすると、運動方程式の x' 成分は、

$$F'_x = ma'_x \quad (3-33)$$

と書ける。ここで、 $a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}$ である。

一方、加速度の変換則(2-39b)より、 $v'_x = 0$ において、

$$a'_x = \gamma(v)^3 a_x \quad (3-34)$$

となる。(3-4), (3-33), (3-34)式より、

$$\boxed{F'_x = F_x} \quad (3-35)$$

が導かれる。以上より、物体の速度方向の相対論的運動方程式は(3-4)式となり、物体にはたらく力の速度方向の成分は、速度方向のローレンツ変換によっては変化しないことがわかる。

速度に垂直方向の運動方程式と力

速度に垂直な方向の運動方程式を考える。

α 系で、 Δt の間 y 軸方向へ力 F_y がはたらき物体の速度の y 成分が Δv_y 変化し、運動量の y 成分が Δp_y 変化したとする。いま、粒子は x 軸方向へ速さ v で動いていることから、(3-30)式より、

$$\Delta p_y = \frac{m \Delta v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v) m \Delta v_y$$

と書ける。物体に加えられた力積が運動量変化に等しいという関係は、

$$F_y \cdot \Delta t = \Delta p_y$$

であるから、速度に垂直な方向(y 軸方向)の運動方程式は、

$$\boxed{m a_y \gamma(v) = F_y} \quad (3-36)$$

となり、物体の速度方向の運動方程式(3-4)とは異なる形であることがわかる。ここで、

$\Delta t \rightarrow 0$ として、 $\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \rightarrow a_y$ とした。

α 系に対し、 x 軸方向へ速度 v で等速運動している β 系で物体の速度は 0 となるから、 β 系(瞬間静止系)での物体の運動方程式の y' 成分は、ニュートン力学におけるものと同じ形であり、

$$m a'_y = F'_y \quad (3-37)$$

と書ける。また、 α 系と β 系間の加速度の変換則(2-40b)式で $v'_x = v'_y = 0$ とおくと、

$$a'_y = a_y \gamma(v)^2 \quad (3-38)$$

となる。(3-36)~(3-38)式より、力の y 成分の関係として、

$$\boxed{F'_y = F_y \gamma(v)} \quad (3-39)$$

を得る。すなわち、速度に垂直な方向の力はローレンツ変換によって変化することがわかる。

さらに、(3-4)式の v_x を v とし、(3-36)式を用いると、

$$\frac{F_x}{F_y} = \gamma(v)^2 \frac{a_x}{a_y} \quad (3-40)$$

となることがわかる。(3-40)式は、力と加速度の x 成分と y 成分の比が等しくないことを表しており、これは、力と加速度のベクトルが平行ではないことを示している(図3-7)。

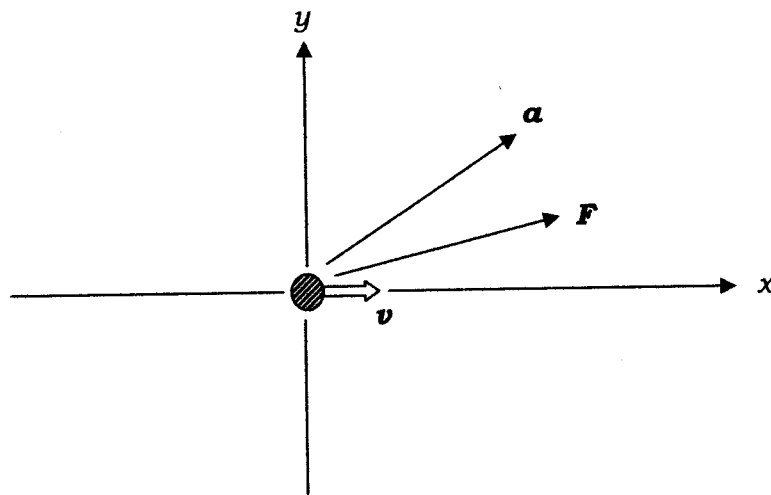


図3-7

§3-5 相対論的力学の例：コンプトン効果

1923年、コンプトンはX線の散乱現象を詳しく研究し、散乱されたX線の中に入射したX線より波長の長いものが含まれる現象を、光の粒子性(X線は可視光より波長の短い電磁波で、可視光と同じ光としての性質をもつ)を用いて説明することに成功した。それまでの電磁気学(19世紀の古典電磁気学、すなわち、マクスウェルにより集大成された電磁気学理論)では、電磁波であるX線が電子で散乱されるとき、X線の波長は変化しないと考えられていた。なぜならば、電磁波は同じ振動数で垂直な方向に振動する電場と磁場の波(図3-8)であり、電磁波が電子に当たると、まず電場により電子が電場と同じ振動数で振動させられる。ある振動数で振動している電子は、マクスウェル理論によれば、同じ振動数の電磁波を周囲に放射する。したがって、入射X線の振動数(すなわち、波長)と散乱X線の振動数(波長)は等しくなければならない。

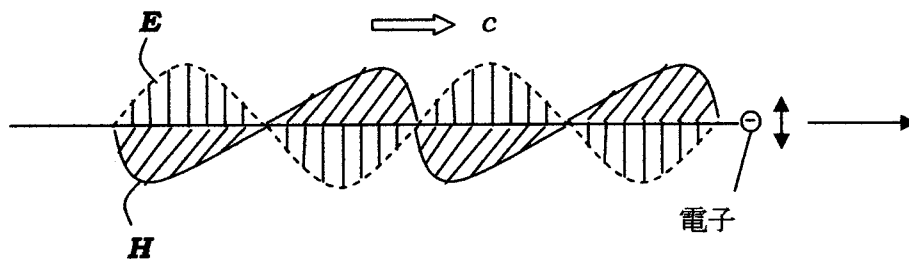


図3-8：電磁波は、電場 E と磁場 H が伝播方向に垂直に、かつ、互いに垂直な方向へそれぞれ振動する横波であり、電子は、電場 E により電磁波の振動数と同じ振動数で振動する。

コンプトンの実験

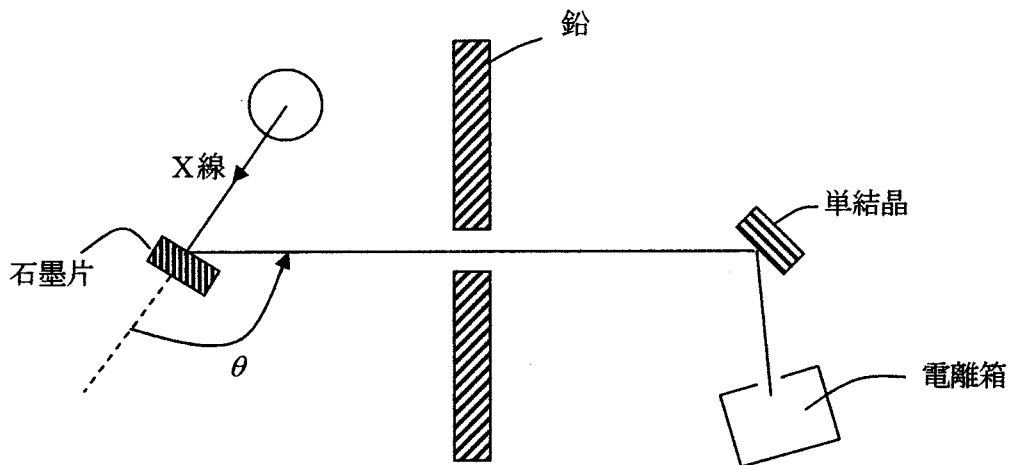


図3-9：コンプトンによる実験の模式図

コンプトンは、図3-9のような装置を用いて、モリブデンに電子を高速で衝突させたときに発せられる波長 $\lambda \approx 7.1 \times 10^{-11} \text{ m}$ の特性X線 (K_{α} 線) を石墨片で散乱させ、その散乱X線の波長を測定した。図3-9において、単結晶と電離箱は、散乱X線の波長を測定するために置かれており、単結晶で強く回折されたX線を電離箱で観測する。このときの回折角から、ブラッグの反射条件式を用いて散乱X線の波長を求める。

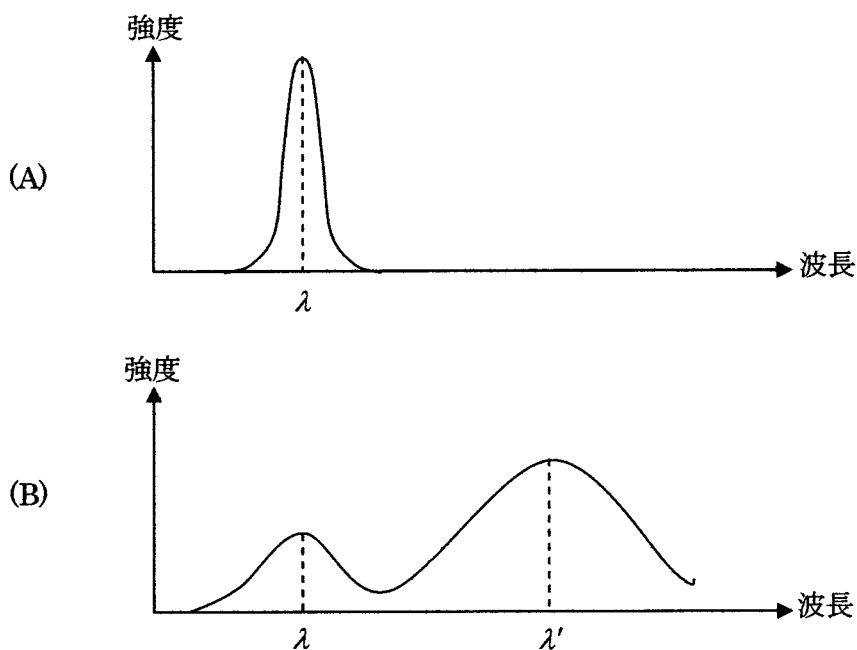


図 3-10 : (A) 入射 X 線の波長に対する強度分布
(B) 散乱 X 線の波長に対する強度分布

実際の実験に用いられる入射 X 線は、波長 λ の特性 X 線だけではなく、 λ とわずかに異なる波長の X 線を含んでいる。したがって、石墨片への入射 X 線の波長の強度分布は、図 3-10(A) のようになる。このような入射 X 線を用いてコンプトンは実験を行い、入射 X 線方向から角(散乱角) θ の方向へ散乱された散乱 X 線の強度分布として、図 3-10(B) のような結果を得た。散乱 X 線の分布は、入射 X 線の分布のピーク波長 λ とは異なる位置に、もう 1 つのピーク波長 λ' をもつ。ピーク波長 λ' は、散乱角 θ とともに長くなる。

コンプトンの説明

この実験結果をコンプトンは、以前にアインシュタインによって提唱されていた光子という考えを用いて、炭素(石墨は炭素原子の結晶)の原子核のまわりを回っている電子と X 線光子の弾性衝突として説明した。コンプトンは、電子の質量を m 、光速を c 、プランク定数を h とするとき、入射 X 線の波長 λ 、散乱 X 線の波長 λ' と散乱角 θ の関係式

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (3-41)$$

を相対論を用いて導いた。ここで、長さの次元をもつ量 $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$ は、コンプトン波長と呼ばれ、入射 X 線からの散乱 X 線の波長の伸びの目安を与える量である。いま、知られた h 、 m 、 c の値を用いてコンプトン波長を計算すると、 $\lambda_0 \doteq 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$ となり、入射 X 線の波長 $\lambda \doteq 7.1 \times 10^{-11} \text{ m}$ の $\frac{1}{30}$ 程度となる。これより、波長の伸び $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ は、入射 X 線お

よび散乱X線の波長 λ および λ' より十分に小さいと考えてよいであろう。

高校の物理でコンプトン効果を習うとき、(3-41)式は、相対論を用いることなく、上の結果をあらかじめ知った上で、 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ として近似計算を行い導かれる¹²⁾。しかし、コンプトンが最初に行ったように、相対論を用いて厳密に計算することにより導くのが本筋であろう。実際、波長が 1.0×10^{-12} m程度の γ 線(波長の短い電磁波)が電子によって散乱されるような場合、はね飛ばされた電子の速さは光速に近くなり、非相対論の計算は許されない。さらに、 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ という近似も使えない(入射X線の波長によらず、コンプトン波長は変化しないことに注意)。このようなときでも、(3-41)式はそのままで正しい結果を与える。

¹²⁾ 高校の物理で習うコンプトン効果の計算は、次のようなものである。図3-11より、相対論的なエネルギー、運動量を用いることなく、エネルギー保存則と運動量保存則を、

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \dots\text{①}$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + mv \cos\phi \quad \dots\text{②}$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - mv \sin\phi \quad \dots\text{③}$$

と書き、②、③式より ϕ を消去する。

$$m^2v^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta)$$

ここで、 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ のとき、

$$\lambda\lambda' \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2 = h^2 \frac{(\Delta\lambda)^2}{\lambda\lambda'}$$

より、 $\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2$ の項は、微小量 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ の2乗がかけられるので落とす。こうして、

$$m^2v^2 \doteq \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta)$$

を①式へ代入して(3-41)式が導かれる。

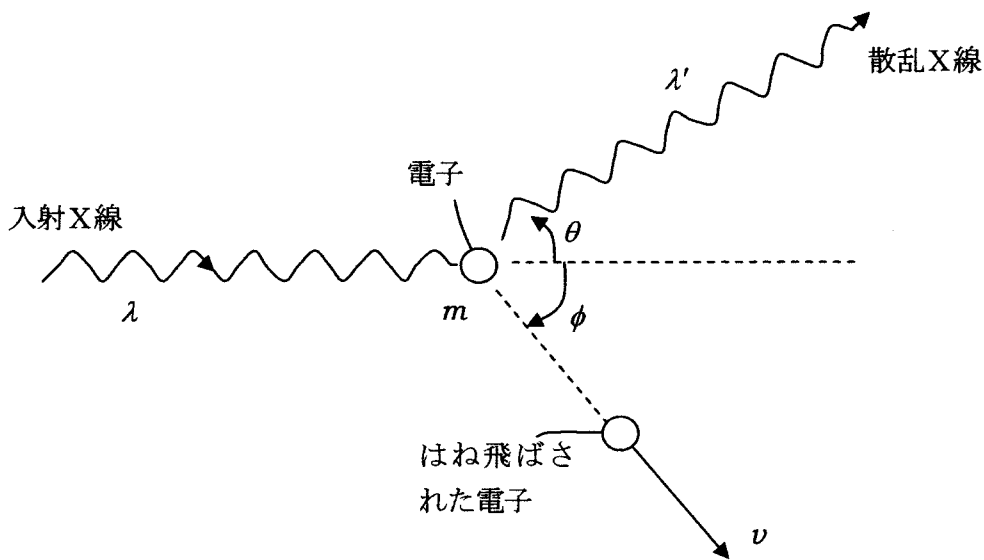


図3-11

図3-11のように、静止している電子に入射X線の光子が弾性衝突し、X線光子が入射方向と角 θ をなす向きに散乱され、電子が入射方向と角 ϕ をなす向きに、速さ v ではね飛ばされたとする。入射X線光子のエネルギーと運動量は、それぞれ $\frac{hc}{\lambda}$ と $\frac{h}{\lambda}$ と表され、散乱X線光子のエネルギーと運動量は、それぞれ $\frac{hc}{\lambda'}$ と $\frac{h}{\lambda'}$ と表される。はね飛ばされた電子の相対論的エネルギーと運動量を、それぞれ E と p とすると、 E と p は(3-14)式と(3-13)で与えられる。電子のエネルギー E とその静止エネルギー mc^2 の差(すなわち、運動エネルギー)を W とすると、衝突の際のエネルギー保存則および入射方向とそれに垂直な方向の運動量保存則は、次のようになる。

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + W \quad (3-42a)$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p \cos \phi \quad (3-42b)$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - p \sin \phi \quad (3-42c)$$

ここで

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

であり、(3-15)式を用いると

$$c^2 p^2 = W(W + 2mc^2) \quad (3-43)$$

が成り立つ。

(3-42b, c)式より ϕ を消去すると,

$$c^2 p^2 = \frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2 c^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \quad (3-44)$$

となる。(3-42a)式より,

$$W = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

として, これを(3-43)式へ代入し, (3-44)式を用いて,

$$m \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right) = \frac{h}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta)$$

を得る。これから(3-41)式が得られる。以上の計算は何らの近似も用いることはなく、厳密なものである。

原子核の影響

これまでの考察では, 原子核の存在を無視し, 電子ははじめ静止し周囲からは何の力もはたらかない自由電子であると考えた。しかし, 原子核のまわりを回っている電子には, 原子核からクーロン引力がはたらき, 電子は原子核の周囲でエネルギーの低い状態に束縛されている。この原子核の存在と束縛エネルギーはどのような影響を及ぼすのであろうか。

まず, 原子核にX線光子が衝突した場合を考える。原子核の質量は電子に比べ十分に大きいので, X線光子が弾性衝突しても原子核はほとんど動かず, X線光子はエネルギーを失うことなく散乱される。したがって, 原子核によって散乱された散乱X線の波長は入射X線の波長にほとんど等しい。実際, コンプトン波長 $\frac{h}{mc}$ は, 散乱体(電子あるいはいまの場合原子核)の質量 m が大きくなると小さくなる。したがって, (3-41)式より, 散乱X線の波長ののび $\Delta\lambda$ は, 散乱体が電子の場合に比べ原子核の場合 $\frac{1}{1800}$ 以下になることがわかる¹³⁾。このことが散乱X線の強度分布(図3-10(B))において, 入射X線と同じ波長 λ にピークが現れる原因と考えられる。

次に, 原子核の周囲に束縛された電子にX線光子が衝突した場合を考える。原子番号の大きな原子では, その原子核がもつ正電荷が大きく, クーロン引力が強いので, 大きな束縛エネルギーで束縛されている電子の割合が多い。X線光子が原子核に強く束縛された電子に衝突すると, 強い束縛エネルギーのため電子は原子核から離れることができず, 電子は原子核と一体となって動く。その結果, 電子はほとんどX線光子からエネルギーを受け取らない。この場合, 散乱X線の波長は入射X線の波長 λ にほとんど等しい。一方, 原子番号の大きな原子であっても, 原子核から遠く離れた軌道を回っている電子の束縛エネルギーは小さい。このような電子はX線光子との衝突に際し, 自由電子のように振る舞い, その結果, 原子核から遠く離れた軌道を回っている電子によって散乱された散乱X線の波

¹³⁾ 原子核を構成している陽子や中性子1個の質量は, 電子の質量の1800倍程度である。

長はのび、 λ' になる。

また、原子番号の小さな原子では、クーロン引力が弱く束縛エネルギーが小さいので、原子核のまわりを回っている電子は自由電子に近い。この場合、すべての電子によって散乱されたX線の波長は、 λ' に近いものとなるであろう。

これらのことから、散乱X線の波長の強度分布は、散乱体原子の原子番号によって異なり、原子番号が大きくなるにしたがって、入射X線と同じ波長 λ の強度が増加する。実際、散乱角 θ を一定にして散乱体原子の原子番号を変えたとき、散乱X線の波長の強度分布として、図3-12(A)、(B)のような実験結果が得られている。

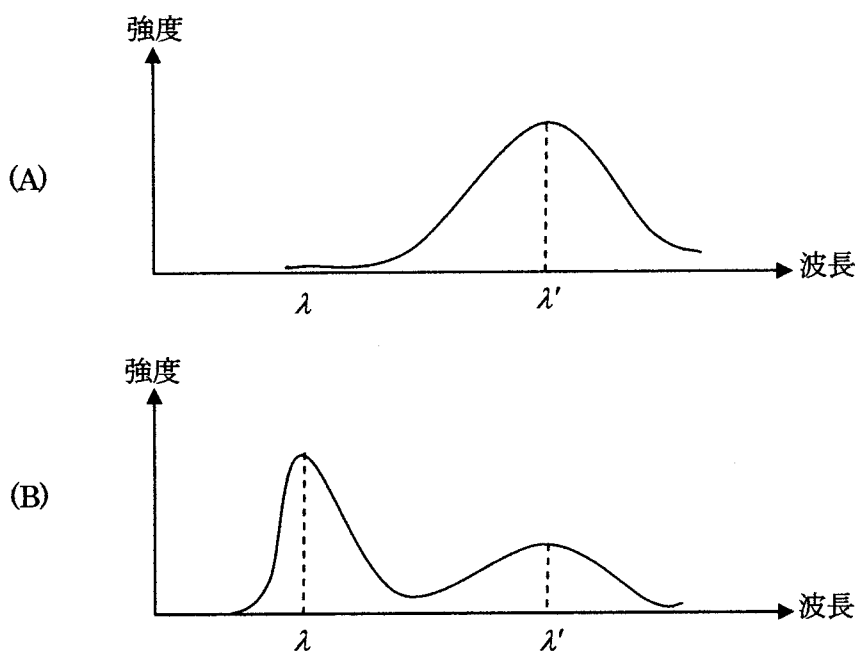


図3-12：散乱X線の波長に対する強度分布

(A) 試料の元素の原子番号が小さいとき

(B) 試料の元素の原子番号が大きいとき