第２章　特殊相対性理論２

§２－５　ローレンツ変換

本節では，「特殊相対性原理」と「光速不変の原理」を厳密に用いて，座標系の変換を考える。

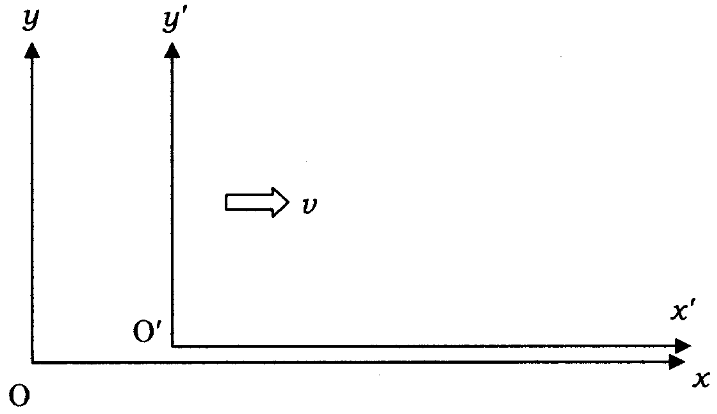

図２－６

前節と同様に，１つの慣性系(α 系)(x, y, z)に対し，もう１つの慣性系(β 系)(x', y', z')が，一定の相対速度vで，x軸とx'軸を一致させ，各座標軸を平行に保ったままx軸の正の向きへ動いている場合(図２－６)を考え，α 系の時刻をt，β 系の時刻をt'とする。本節では，**一般にα系とβ系では時間の進み方が異なり，長さも同じではない**とする。α 系の時刻$t=0$においてα 系とβ 系の原点 $\mathrm{O}(x=y=z=0)$と$\mathrm{O}'(x'=y'=z'=0)$を一致(すなわち，各座標軸を一致)させ，β 系の時刻を$t'=0$に合わせる。このとき，任意の時刻と位置におけるα 系とβ 系の時刻および座標の間の関係を求めよう。２つの座標系の時刻と座標の関係が，係数が速度vの関数である次の１次変換で与えられるとする[5]。

$$t' = \alpha(v)t + \beta(v)x \qquad (2-17\,\mathrm{a})$$

$$x' = \delta(v)t + \gamma(v)x \qquad (2-17\,\mathrm{b})$$

$$y' = \lambda(v)y \qquad (2-17\,\mathrm{c})$$

---

[5] ２つの座標系の間の関係が１次変換で与えられるのは，次の理由による。「特殊相対性原理」によれば，α 系とβ 系で運動の法則は同じ形に書けなければならない。すなわち，α 系で力がはたらかず，物体が等速運動をしていれば，β 系でも等速運動をしなければならない。もし，２つの座標系の間の関係が１次変換でないならば，α 系で等速運動をしていた物体がβ 系で等速運動をしないことになる。

(２－17 a ,b)式で，t', x'がyまたはzに比例する項を含まないのは，次の理由による。もし，t', x'がyまたはzに比例する項を含むならば，$t=x=0$で$y\neq0$，$z\neq0$のとき，$t'\neq0$，$x'\neq0$となり，$t=x=0$のとき，$t'=x'=0$という問題 設定に反する。

(２－17 c , d)式で，y'座標とz'座標をそれぞれyとzの定数倍に等しいとおいたのは，次の理由による。もし，y'とz'がx，tを含むならば，$y=z=0$のとき，$y'\neq0$，$z'\neq0$となり，x軸とx'軸が一致しない。また，$y'(z')$が$z(y)$を含むならば，$x=y=0\ (x=z=0)$のとき，$y'\neq0\ \ (z'\neq0)$となり，z軸(y軸)とz'軸(y'軸)が平行ではない。また，y軸方向とz軸方向の空間の性質が同等である(空間の等方性)ことから，(２－17 c , d)式のyとzの係数は等しい。

$$z' = \lambda(v)z \qquad (2-17\,\mathrm{d})$$

(2－17 a ～ d)式に含まれている係数$\alpha(v)$，$\beta(v)$，$\gamma(v)$，$\delta(v)$，$\lambda(v)$を次の4つの手順で決めよう。

[Ⅰ]　空間の対称性

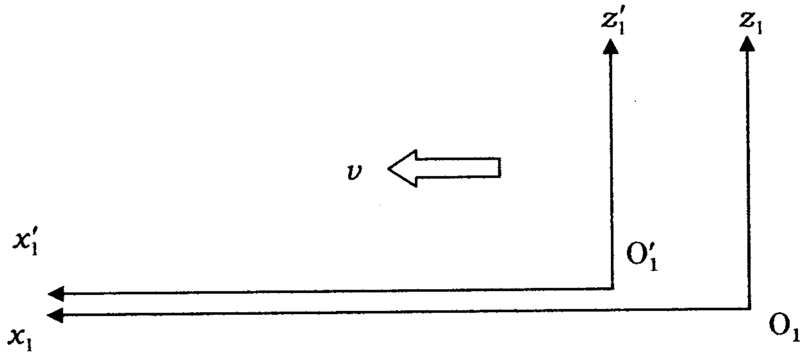

図2－7

図2－6で，空間の座標軸を$x \to x_1 = -x$，$y \to y_1 = z$，$z \to z_1 = y$と置き換え，速度を$v \to -v$と置き換え(図2－7)ても，α系とβ系の関係，すなわち，変換(2－17 a ～ d)は変わらないはずである。上の置き換えで(2－17 a ～ d)式は，

$$t' = \alpha(-v)t - \beta(-v)x \qquad (2-18\,\mathrm{a})$$

$$-x' = \delta(-v)t - \gamma(-v)x \qquad (2-18\,\mathrm{b})$$

$$z' = \lambda(-v)z \qquad (2-18\,\mathrm{c})$$

$$y' = \lambda(-v)y \qquad (2-18\,\mathrm{d})$$

と書ける。(2－18 a ～ d)式が(2－17 a ～ d)式と同じ変換を表すとすると，次の関係が成り立たねばならない。

$$\alpha(-v) = \alpha(v) \qquad (2-19\,\mathrm{a})$$

$$\beta(-v) = -\beta(v) \qquad (2-19\,\mathrm{b})$$

$$\gamma(-v) = \gamma(v) \qquad (2-19\,\mathrm{c})$$

$$\delta(-v) = -\delta(v) \qquad (2-19\,\mathrm{d})$$

$$\lambda(-v) = \lambda(v) \qquad (2-19\,\mathrm{e})$$

[Ⅱ]　原点O′とOの位置

(i) α系で時刻t，β系で時刻t'のとき，β系の原点O′の位置は，α系では，$t=t$，$x=vt$と表され，β系では，$t'=t'$，$x'=0$と表される。これらを(2－17 a , b)式へ代入すると，

$$t' = \{\alpha(v) + \beta(v)v\}t$$

$$0 = \{\delta(v) + \gamma(v)v\}t$$

となる。ここで，$t \neq 0$より，

$$\delta(v) = -\gamma(v)v \qquad (2-20)$$

を得る。

(ii) α系で時刻t，β系で時刻t'のとき，α系の原点Oの位置は，α系では，$t=t$，$x=0$

と表され，β系では，$t'=t'$，$x'=-vt'$と表される。これらを(2－17 a , b)式へ代入すると，

$$t'=\alpha(v)t$$
$$-vt'=\delta(v)t$$

となる。ここで，$t\neq 0$，$t'\neq 0$より，

$$\delta(v)=-\alpha(v)v \qquad (2-21)$$

を得る。

(2－20)，(2－21)式より，

$$\alpha(v)=\gamma(v) \qquad (2-22)$$

となる。さらに，$\beta(v)$を次のように置き換えよう。

$$\beta(v)=\frac{-v\gamma(v)}{K(v)} \qquad (2-23)$$

新たな関数$K(v)$は，(2－19 b , c)式より，

$$K(-v)=K(v) \qquad (2-24)$$

を満たすことがわかる[6]。

(2.20)，(2－22)，(2－23)式を(2－17 a , b)式へ代入して，時間tと座標xの変換式として，

$$t'=\gamma(v)\left(t-\frac{v}{K(v)}x\right) \qquad (2-25\,a)$$

$$x'=\gamma(v)(x-vt) \qquad (2-25\,b)$$

を得る。

[III] 相対性原理

α系とβ系は全く同等である。したがって，β系からα系への変換(すなわち，(2－25 a , b)式および(2－17 c , d)式で$t\to t'$，$x\to x'$，$y\to y'$，$z\to z'$，$v\to -v$とした変換)

$$t=\gamma(-v)\left(t'+\frac{v}{K(-v)}x'\right) \qquad (2-26\,a)$$

$$x=\gamma(-v)(x'+vt') \qquad (2-26\,b)$$
$$y=\lambda(-v)y' \qquad (2-26\,c)$$
$$z=\lambda(-v)z' \qquad (2-26\,d)$$

とα系からβ系への変換(すなわち，(2－25 a , b)式と(2－17 c , d)式の変換)は，同じ関係式を与えるはずである。(2－26 a ～ d)式より，

---

6) (2－23) 式で$v\to -v$とすると，左辺は，$\beta(-v)=-\beta(v)$となり，符号が変わる。一方，右辺の分子$-v\gamma(v)$は，$-(-v)\gamma(-v)=v\gamma(v)$となり符号が変わるから，右辺の分母の符号は変化しないので，(2－24) 式のようになる。

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{K(-v)}x}{\gamma(-v)\left(1 - \dfrac{v^2}{K(-v)}\right)} \qquad (2-27\text{a})$$

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma(-v)\left(1 - \dfrac{v^2}{K(-v)}\right)} \qquad (2-27\text{b})$$

$$y' = \frac{y}{\lambda(-v)} \qquad (2-27\text{c})$$

$$z' = \frac{z}{\lambda(-v)} \qquad (2-27\text{d})$$

を得る。(2－27 a～d)式が(2－25 a, b)式および(2－17 c, d)式に一致するためには,

$$\gamma(-v) = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{K(v)}}} \qquad (2-28)$$

および

$$\lambda(v) \cdot \lambda(-v) = \lambda(v)^2 = 1 \qquad (2-29)$$

が成り立たねばならない。ここで, (2－19 c, e)式を用いた。(2－29)式より, $\lambda(v) = \pm 1$ となるが, 「$v \to 0$ のとき $y' \to y$」を考慮すると,

$$\lambda(v) = 1 \qquad (2-30)$$

が得られる[7]。

[IV] 光速不変の原理

時刻 $t = 0$ ($t' = 0$)において原点O(O′)で x 軸の正の向きに発せられた光は, α 系では, 時刻 t において位置 $x = ct$ に達し, β 系では, 時刻 t' において位置 $x' = ct'$ に達する(光速不変の原理)。これらを(2－25 a, b)式へ代入して,

$$t' = \gamma(v)\left(1 - \frac{cv}{K(v)}\right)t$$

$$ct' = \gamma(v)(c - v)t$$

となる。これらの式が任意の t および t' において成立するためには,

$$K(v) = c^2 \qquad (2-31)$$

が成り立たねばならない。

以上より, α 系から β 系へのローレンツ変換は,

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (1-7\text{ a})$$

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \qquad (1-7\text{ b})$$

---

7) (2－27 c) 式で, $v \to 0$ のとき, $y' \to y$ となるためには, $\lambda(-v) \to 1$ でなければならない。$\lambda(v) = \lambda(-v)$ は, v によらず $+1$ か -1 であるから, (2－30) 式が成り立つ。

$$y' = y \qquad (1-7\,\mathrm{c})$$

$$z' = z \qquad (1-7\,\mathrm{d})$$

となり，$\gamma(v)$は，

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (1-8)$$

で与えられる。また，β系からα系への変換は，(1－7 a～d)式を逆に解くことにより，

$$t = \gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad (2-32\,\mathrm{a})$$

$$x = \gamma(v)(x' + v t') \qquad (2-32\,\mathrm{b})$$

$$y = y' \qquad (2-32\,\mathrm{c})$$

$$z = z' \qquad (2-32\,\mathrm{d})$$

と表される。ここで，$c \to \infty$のとき，$t' = t$，$x' = x - vt$，$y' = y$，$z' = z$となり，通常のガリレイ変換(2－11 a～c)が得られる。

§6　速度，加速度の変換則

通常のニュートン力学における速度の変換則では，α系に対するβ系の速度のx成分をv_1，β系に対するγ系の速度のx成分をv_2とすると，α系に対するγ系の速度のx成分v_3は，

$$v_3 = v_1 + v_2 \qquad (2-33)$$

となる。しかし，相対論で「光速不変の原理」を用いるかぎり，速度の変換則(2－33)が成り立たないのは明らかである。なぜなら，$v_1 = v_2 = \frac{2}{3}c$のとき，$v_3 = \frac{4}{3}c$となり，γ系のα系に対する速度が光速cを超えてしまう。「光速不変の原理」では，どのような座標系(慣性系)で見ても光速がcであるから，ある座標系に対し光速cを超える速度をもつ座標系は存在できないはずである。

相対論における速度の変換則は，前節で求めたローレンツ変換から導き出される。

いま，ある物体が空間の中を，任意の速度と加速度をもって運動しているものとする。まず，物体の速度のx成分の変換則を求める。α系でΔtの間に物体のx座標がΔx変化し，β系で$\Delta t'$の間に物体のx'座標が$\Delta x'$変化したとすると，ローレンツ変換(1－7 a，b)式より，

$$\Delta t' = \gamma(v)\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \qquad (2-34\,\mathrm{a})$$

$$\Delta x' = \gamma(v)(\Delta x - v\Delta t) \qquad (2-34\,\mathrm{b})$$

が成り立つ。これより，

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

となる。ここで，$\Delta t \to 0$ のとき $\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} \to v'_x$，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to v_x$ とおいて，α 系から β 系への速度の x 成分の変換則

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \tag{2-35 a}$$

を得る。また，β 系から α 系への変換則は，

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v'_x} \tag{2-35 b}$$

となる。(2 −35 a , b)式は，　$c \to \infty$ のとき $v'_x = v_x - v$ となり，ニュートン力学における速度の変換則(2 −12)に帰着する。

次に，物体の速度の y 成分の変換則を求める。

(1 − 7 c)式より $\Delta y' = \Delta y$ となるので，(2 −34 a)式を用いて，

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(v)\left(\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

となり，α 系から β 系への速度の y 成分の変換則

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x\right)} \tag{2-36 a}$$

を得る。β 系から α 系への変換則は，

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{v}{c^2} v'_x\right)} \tag{2-36 b}$$

である。

速度の z 成分の変換則は，y 成分の場合と全く同じである。

続いて，加速度の変換則を求める。α 系で Δt の間に物体の速度の x 成分が Δv_x 変化し，β 系で $\Delta t'$ の間に物体の速度の x 成分が $\Delta v'_x$ 変化したとする。まず，(2 −35 a)式より，

$$v'_x + \Delta v'_x = \frac{v_x + \Delta v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}(v_x + \Delta v_x)} = \frac{(v_x - v)\left(1 + \dfrac{\Delta v_x}{v_x - v}\right)}{\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x\right)\left(1 - \dfrac{\dfrac{v}{c^2} v_x}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \dfrac{\Delta v_x}{v_x}\right)}$$

ここで，$\left|\dfrac{\Delta v_x}{v_x}\right| \ll 1$，$\left|\dfrac{\Delta v}{v_x - v}\right| \ll 1$ より，近似公式

「$|x| \ll 1$ のとき，$(1+x)^\alpha \fallingdotseq 1 + \alpha x$　(α：実数)」

を用いて，

$$v_x' + \Delta v_x' \fallingdotseq \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \left(1 + \frac{\Delta v_x}{v_x - v} + \frac{\dfrac{v}{c^2} \Delta v_x}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \right)$$

$$= \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \left\{ 1 + \frac{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} \right) \Delta v_x}{(v_x - v)\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x \right)} \right\}$$

$$= \frac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} + \frac{\Delta v_x}{\gamma(v)^2 \left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x \right)^2}$$

となる。したがって，

$$\Delta v_x' = \frac{\Delta v_x}{\gamma(v)^2 \left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x \right)^2} \qquad (2-37)$$

β 系から α 系への座標のローレンツ変換(2－32 a , b)から，微小変化の式

$$\Delta t = \gamma(v) \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$

$$\Delta x = \gamma(v)(\Delta x' + v \Delta t')$$

を求め，これらより，$\Delta x'$ を消去して，

$$\Delta t' = \gamma(v) \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta t \qquad (2-38)$$

を得る。(2－37)，(2－38)式を用い，$\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \to a_x$，$\dfrac{\Delta v_x'}{\Delta t'} \to a_x'$，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to v_x$ ($\Delta t \to 0$ のとき)として，α 系から β 系への加速度の x 成分の変換則は，

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma(v)^3 \left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x \right)^3} \qquad (2-39\text{a})$$

となる。β 系から α 系への変換則は，同様に，

$$a_x = \frac{a_x'}{\gamma(v)^3 \left(1 + \dfrac{v}{c^2} v_x' \right)^3} \qquad (2-39\text{b})$$

である。

さらに，加速度の y 成分の変換則を求める。速度の y 成分の変換則(2－36 a)より，微小量の積の項を落として，

$$v_y' + \Delta v_y' = \frac{v_y + \Delta v_y}{\gamma(v) \left\{ 1 - \dfrac{v}{c^2} (v_x + \Delta v_x) \right\}}$$

$$\fallingdotseq \frac{v_y}{\gamma(v)\left(1-\frac{v}{c^2}v_x\right)}+\frac{\Delta v_y}{\gamma(v)\left(1-\frac{v}{c^2}v_x\right)}+\frac{\frac{v}{c^2}v_y\Delta v_x}{\gamma(v)\left(1-\frac{v}{c^2}v_x\right)^2}$$

となり，(２－38)式を用いて，α 系から β 系への加速度の y 成分の変換則を次のように得る。

$$a'_y=\frac{\Delta v'_y}{\Delta t'}=\frac{a_y}{\gamma(v)^2\left(1-\frac{v}{c^2}v_x\right)^2}+\frac{\frac{v}{c^2}v_y a_x}{\gamma(v)^2\left(1-\frac{v}{c^2}v_x\right)^3} \qquad (2-40\,\mathrm{a})$$

β 系から α 系への加速度の変換則は,

$$a_y=\frac{a'_y}{\gamma(v)^2\left(1+\frac{v}{c^2}v'_x\right)^2}-\frac{\frac{v}{c^2}v'_y a'_x}{\gamma(v)^2\left(1+\frac{v}{c^2}v'_x\right)^3} \qquad (2-40\,\mathrm{b})$$

となる。

§２－７　光行差とフレネルの随伴係数

光行差

前章では，エーテルの存在を仮定することにより説明したが，ここでは，相対論的な速度の変換則を用いて説明する。

速度 v で動いている観測者が，静止しているときの仰角が θ の方向の恒星からくる光を観測すると，その仰角は,

$$\alpha \fallingdotseq \frac{v}{c}\sin\theta \qquad (1-1)$$

だけ小さくなる。ここで，c は光の速さである。光行差の式(１－１)は相対論的に，次のように導かれる。

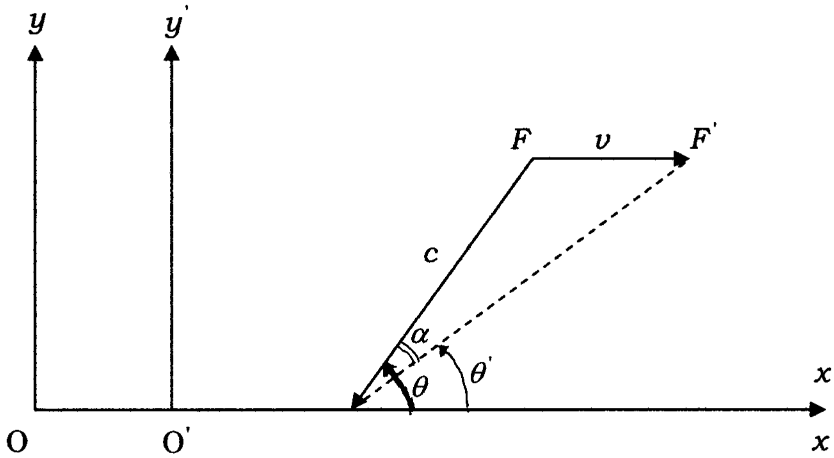

図２－８

図２－８のように，恒星からくる光がα系でx軸に対し角度θをなし，β系(α系に対しx軸方向へ速度vで等速運動をしている座標系)でx'軸に対し角度θ'をなしていたとする。光の速度のx成分はα系で，$v_x=-c\cos\theta$，β系で，$v'_x=-c\cos\theta'$であるから，(２－35 a)式を用いて，$\cos\theta'$は，

$$\cos\theta'=-\frac{v'_x}{c}=\frac{\cos\theta+\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\theta}\fallingdotseq\cos\theta+\frac{v}{c}\sin^2\theta \qquad (2-41)$$

と表される。ここで，$\left|\dfrac{v}{c}\right|\ll 1$として，近似公式を用いた。$\theta'=\theta-\alpha$とおくと，$|\alpha|\ll 1$であるから，近似公式「$\cos\alpha\fallingdotseq 1$，$\sin\alpha\fallingdotseq\alpha$」を用いて，$\cos\theta'$は，

$$\begin{aligned}\cos\theta'&=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\\&\fallingdotseq\cos\theta+\alpha\sin\theta\end{aligned} \qquad (2-42)$$

となる。(２－41)，(２－42)式より(１－１)式を得る。

フレネルの随伴係数

前章で説明したフレネルの随伴係数は，何ら恣意的な仮定を用いることなく，相対論的な速度の変換則(すなわち，ローレンツ変換)を用いて，容易に導くことができる。

フレネルは，透明な物体の速度をv，絶対屈折率をnとしたとき，透明な物体中のエーテルは，速度

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \qquad (1-2)$$

で動くと主張した。光は透明な物体中のエーテルに対し速度$\dfrac{c}{n}$で動くと考え，ガリレイ変換による速度の変換則(２－12)を用いると，速度vで動いている物体中を伝わる光の，静止した観測者に対する速度は，

$$c'=\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \qquad (4-43)$$

となる。

(２－43)式を相対論(ローレンツ変換)を用いて導こう。静止した観測者のいる座標系をα系，透明な物体の座標系をβ系とする。絶対屈折率nの物体中の光の速度は，$\dfrac{c}{n}$であるから，(2.35 b)式で$v'_x=\dfrac{c}{n}$とおくと，静止した観測者から見た光の速度は，

$$\frac{\dfrac{c}{n}+v}{1+\dfrac{v}{nc}}\fallingdotseq\frac{c}{n}\left(1+\frac{nv}{c}\right)\left(1-\frac{v}{nc}\right)\fallingdotseq\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$$

となり，(2.43)式で与えた物体中の光の速度に一致する。ここで，物体の速度vは，光の

速度cより十分に遅い$\left(\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1\right)$として，近似公式を用いた。

物体中のエーテルが物体に引きずられて速度$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$で動くというフレネルの主張は，ローレンツ変換から自然に導き出されることがわかる。

§2－8　「光速不変の原理」を用いないローレンツ変換の導出[8)]

§2－5でローレンツ変換を導く際，われわれは「光速不変の原理」を用いた。しかし，「光速不変の原理」を用いなくても，ローレンツ変換と同等の関係式を導くことができる。すなわち，(2－25 a , b)式に含まれた$K(v)$が，速度vによらない正の一定値であることを示すことができる。ただし，この一定値が光速cの2乗に等しいことを示すには，光の速さは座標系のとり方によらず一定になるという，観測結果あるいは電磁気学の結論を用いなければならない。

β系(t',x',y',z')をα系(t,x,y,z)に対し速度v_1でx軸の方向へ等速運動をしている座標系とし，γ系(t'',x'',y'',z'')を，β系に対し速度v_2でx軸の方向へ等速運動をしている座標系とする。このとき，γ系のα系に対するx軸方向の速度をv_3とする。まず，(2－25 a , b)式より，次式を書こう。

$$t' = \gamma(v_1)\left(t - \frac{v_1}{K(v_1)}x\right) \tag{2－44 a}$$

$$x' = \gamma(v_1)(x - v_1 t) \tag{2－44 b}$$

および

$$t'' = \gamma(v_2)\left(t' - \frac{v_2}{K(v_2)}x'\right) \tag{2－45 a}$$

$$x'' = \gamma(v_2)(x' - v_2 t') \tag{2－45 b}$$

ここで，$\gamma(v)$は(2－28)式で与えられる。(2－44 a , b)式を(2－45 a , b)式へ代入すると

$$t'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\left\{\left(1+\frac{v_1 v_2}{K(v_2)}\right)t - \left(\frac{v_1}{K(v_1)}+\frac{v_2}{K(v_2)}\right)x\right\} \tag{2－46 a}$$

$$x'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\left\{\left(1+\frac{v_1 v_2}{K(v_1)}\right)x - (v_1+v_2)t\right\} \tag{2－46 b}$$

となる。一方，t''，x''は，(2－25 a , b)式より，

8) ここで説明する「光速不変の原理」を用いないローレンツ変換の導出を，最初にやって見せたのは，テルレッツキーである。彼はその著書「相対性理論のパラドックス」(中村誠太郎監修，林昌樹訳（東京図書）1966年）の中で，この導出を示した。また，「光速不変の原理」を用いることなしに，ここでの説明とは異なる方法で，相対論的な速度の変換則を導出したのは，マーミン(N. David Mermin; American Journal of Physics, Vol.52,Page 119, 1984年）である。

$$t'' = \gamma(v_3)\left(t - \frac{v_3}{K(v_3)}x\right) \qquad (2-47\,\mathrm{a})$$

$$x'' = \gamma(v_3)(x - v_3 t) \qquad (2-47\,\mathrm{b})$$

と書ける。これから，t''の式のtの係数とx''の式のxの係数が等しいことがわかるので，(2 −46 a , b)式でtとxの係数を等しいとおくと，

$$K(v_2) = K(v_1)$$

となる。これは，$K(v)$はvによらない定数であることを示している。そこで，

$$K(v) = K \quad (\text{定数}) \qquad (2-48)$$

とおく。(2 −17 c , d)，(2 −25 a , b)，(2 −28)，(2 −30)および(2 −48)式から，「光速不変の原理」を用いることなしに，α系に対しx軸方向へ速度vで動いているβ系へのローレンツ変換を次のように得る。

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{K}x\right) \qquad (2-49\,\mathrm{a})$$

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \qquad (2-49\,\mathrm{b})$$

$$y' = y \qquad (2-49\,\mathrm{c})$$

$$z' = z \qquad (2-49\,\mathrm{d})$$

ここで，$\gamma(v)$は，

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{K}}} \qquad (2-50)$$

となる。

次に，(2 −46 a)式と(2 −47 a)式のxの係数を等しくおき，(2 −48)式を用いると，

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2)(v_1 + v_2) = \gamma(v_3)v_3 \qquad (2-51)$$

となる。これは，(2 −46 b)式と(2 −47 b)式のtの係数を等しいとおいた式に等しい。(2 −51)式の両辺を２乗して，(2 −50)式を用いると，

$$\frac{(v_1 + v_2)^2}{\left(1 - \dfrac{v_1^2}{K}\right)\left(1 - \dfrac{v_2^2}{K}\right)} = \frac{v_3^2}{1 - \dfrac{v_3^2}{K}}$$

よって，

$$v_3^2\left(1 + \frac{v_1 v_2}{K}\right)^2 = (v_1 + v_2)^2$$

$$\therefore \quad v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{K}} \qquad (2-52)$$

となる。(2 −52)式は，(2 −35 b)式において，$v \to v_1$，$v'_x \to v_2$，$v_x \to v_3$として，c^2をKに置き換えたものであり，速度の変換則を表している。

定数Kのとり得る値の範囲を求めよう。まず，$K<0$の場合を考える。議論を簡単にす

るため，$v_1>0$，$v_2>0$とし，v_1，v_2は無限小ではないが，小さな速度とする。ある座標系に対し，小さな速度で動く座標系は，必ずとることができると考えられる。(2－52)式より，$v_1v_2<|K|$のとき，$v_3>v_1+v_2$となる。次に γ系に対しx軸方向へ速度$v_2'(>0)$で動いているγ_1系をとると，$v_3v_2'<|K|$であったとしても，γ_1系のα系に対する速度v_4は，$v_4>v_3+v_2'$となる。このように次々に元の座標系に対しx軸方向へ有限の速度で動く座標系を考えると，無限小ではない速度$V_2(>0)$に対し，いつかは$v_nV_2>|K|$を満たす速度v_nが得られる。このとき，α系に対しx軸方向へ速度v_nで動く座標系をδ系とし，δ系に対しx軸方向へ速度V_2で動く座標系をδ_1系とすると，δ_1系のα系に対する速度v_{n+1}は，(2－52)式より$v_{n+1}<0$となる。これは，δ系がα系に対しx軸の正方向へ運動し，δ_1系がδ系に対しやはりx軸の正方向へ運動しているとき，δ_1系はα系に対しx軸の負方向へ運動することを示している。このようなことは起きないはずである。したがって，Kは正である。

定数Kの物理的意味を考える。時間tと空間座標(x, y, z)は実数であるから，ローレンツ変換は実数の変換でなければならない。したがって，$K>0$のとき，$\gamma(v)$を与える式(2－28)よりvは$\sqrt{K}$を超えることはできない。すなわち，$\sqrt{K}$は速度の上限を与える。いま，ある物体がα系に対しx軸の正方向へ上限の速度$\sqrt{K}$で運動しているとき，α系に対しx軸方向へ速度vで運動しているβ系で観測するこの物体の速度v'は(2－52)式で$v_1=v$，$v_3=\sqrt{K}$とおくと，

$$v'=v_2=\sqrt{K}$$

となる。すなわち，上限の速度で動いている物体の速度は，観測する座標系によらず一定であることがわかる。したがって，上限の速度を見つけようと思えば，どんな慣性系で観測しても同じ速度となるものを探せばよい。そのようなものとして，光速cが存在する。