第２章　特殊相対性理論

§２－１　はじめに

前章で述べたように，アインシュタインが特殊相対性理論の論文を発表する以前にローレンツによりローレンツ変換と呼ばれる変換式が提案され，実験や観測に現れる矛盾は解消されていたのである。しかし，光がエーテル中を伝わるという考えは，ずっと受け継がれてきていた。

以上のようなローレンツの仕事を，スイスで特許技師をしていたアインシュタインは，ほとんど知らなかった。彼は，1905 年，観測にかからないエーテルの存在を仮定する必要はないと考え，「特殊相対性原理」と「光速不変の原理」という２つの原理だけを用いて理論を構築することに成功した[1)]。

〔Ⅰ〕「特殊相対性原理」: 自然法則はあらゆる慣性系（等速直線運動をしている座標系）において，同じ形で表される。
〔Ⅱ〕「光速不変の原理」: 真空中における光の速さは，どんな慣性系においても，光源の速度に関係なく一定である。

「特殊相対性原理」は，もともと力学において成立していると考えられていたものである。ニュートン力学では，「力学の法則はあらゆる慣性系で同じ形で表される」という相対性原理（相対論ではこれを一般相対性原理と区別して，特殊相対性原理と呼ぶ）が成り立っている。アインシュタインは，この相対性原理が力学のみならず，光学と電磁気学においても成り立っていると考えた。すなわち，光学と電磁気学の法則はどんな慣性系でも同じ形で表され，相対的な運動によって物理的性質が決まると考えたのである。光は電磁波であり，電磁波の速度は電磁気学の法則によって与えられる。電磁気学の法則が任意の慣性系で同じ形に表されるならば，電磁波，すなわち，光の速度は任意の慣性系で同じでなければならない。したがって，相対性原理が電磁気学においても成り立つならば，「光速不変の原理」は必然的に導き出されることになる。また，「特殊相対性原理」およびそこから導き出される「光速不変の原理」は，特別な性質を与えられた「絶対静止空間」を否定し，また，絶対静止概念の基になっているエーテルという媒質の存在をも否定するものであった。なぜなら，自然法則があらゆる慣性系で同じであり，光速が任意の慣性系で等しければ，ある座標系が静止しているかどうかを決める判断材料は何もなくなってしまうからである。

電磁気学に頼らず，力学法則だけを用いて理論を組み立てるには，「光速不変の原理」は便利である。まずは，「光速不変の原理」を用いて話を進めよう。

[1)] アインシュタインの原論文は，A. Einstein:Ann.Der Phys.17(1905),891～921
この論文には，特殊相対論のほとんどすべてが大変読みやすく書かれている。原論文はドイツ語であるが，日本語に訳され，丁寧な解説がつけられて出版されている。
・A.アインシュタイン著，内山龍雄訳「相対性理論」岩波文庫（1988）

§２－２　時間の遅れと長さの短縮

時間の遅れ

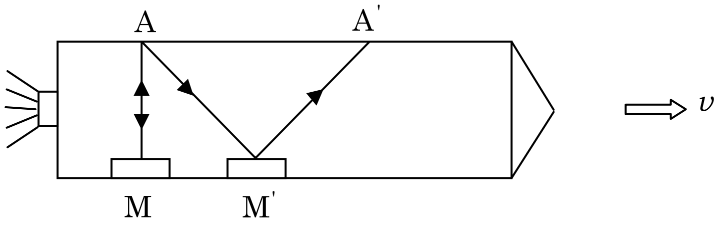


図２－１

　静止している座標系（α 系）に対し，宇宙船が図２－１のように，速度v で等速運動している。ここで，宇宙船とともに動いている座標系をβ 系とする。α 系の時刻$t=0$，β 系の時刻$t'=0$ において宇宙船内の点 A から光を発し，それをβ 系で見ると，光は A →M→A と進むが, 静止しているα 系で見ると, 光が A→M と進む間に M は M' まで動いており, また，光が点 A に戻るまでに，A は A' まで動いている。したがって，点 A で光を観測する時刻をα 系でt，β 系でt' とすると，α 系でもβ 系でも光の速さはともにc である（「光速不変の原理」）から，次の関係式が成り立つ。

$$\alpha \text{系：} \qquad t = \frac{\mathrm{AM'} + \mathrm{M'A'}}{c} = \frac{2\mathrm{AM'}}{c}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AM'} = \frac{ct}{2}$$

$$\beta \text{系：} \qquad t' = \frac{2\mathrm{AM}}{c}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AM} = \frac{ct'}{2}$$

　また，鏡 M は，α 系で見たとき光が M に達する時刻に，M' に達するのであるから，

$$\mathrm{MM'} = \frac{vt}{2}$$

と書ける。したがって，△AMM' に三平方の定理（$\mathrm{AM'}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MM'}^2$）を用いると，

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \left(\frac{ct'}{2}\right)^2 + \left(\frac{vt}{2}\right)^2$$

となる。これより，

$$\boxed{t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad （２－１）$$

を得る。宇宙船内の点Ａで光を観測するのはある決まった『とき』であるから，（２－１）式は，β 系での時間の進み方が α 系の $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍となっていることを示す。すなわち，α 系に対し，動いている β 系では α 系より時間はゆっくり進み，時間は遅れる[2)]。

ここで次のことに注意しておかなければならない。α 系と β 系でどちらが動いているかは全く相対的なもので，β 系から見れば，α 系は速度 $-v$ で逆向きに動いている。したがって，α 系から見たとき，β 系の時間が α 系よりゆっくり進むのであり，β 系から見ると，α 系の時間が β 系よりゆっくり進む。

長さの短縮

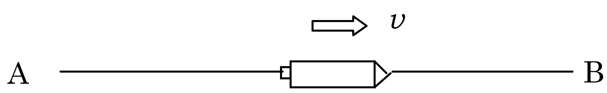


図２－２

図２－２のように，宇宙船が点Ａから点Ｂへ向けて，速さ v で等速運動している。静止している α 系で時刻 $t=0$，宇宙船とともに動いている β 系で時刻 $t'=0$ に，点Ａを出発し，α 系で時刻 t，β 系で時刻 t' に点Ｂに到達する。α 系で見たＡ，Ｂ間の距離 l は，

$$l = vt$$

である。一方，点Ａ（α 系）から見た宇宙船（β 系）の速さは v であるから，α 系から見た β 系のＡ，Ｂ間の距離 l' は

$$l' = vt'$$

である。

ここで，（２－１）式を用いると，

2） $\frac{v}{c}=\frac{1}{2}$ のとき，α 系で 10 秒時間が経過したとすると，α 系から見ると，β 系では $10\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \fallingdotseq$ 8.66 秒の時間しか経過していない。

$$\frac{l'}{l}=\frac{t'}{t}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{l'=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (２－２)$$

となる。これは，α系から見ると，β系での長さはα系の$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$倍に縮んでいることを示している。また，時間の遅れの場合と同様に，β系から見ると，α系の長さはβ系より縮んでいる。

＜Q&A＞　双子のパラドックス

Q：　α系から見るとβ系の時間はゆっくり進み，β系から見るとα系の時間がやはりゆっくり進むとすると，何か矛盾が起きないだろうか･

A：　このことに関連したものに,「双子のパラドックス」というのがあるね。

Q：　「双子のパラドックス」というのは何ですか･

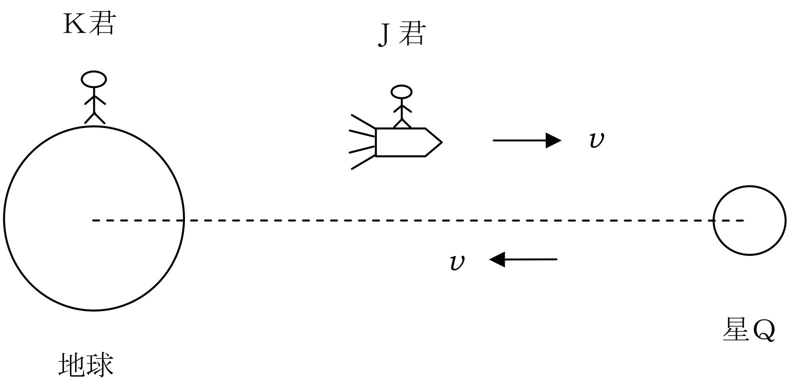


図２－３

A：　双子の兄弟K君とJ君がおり，K君は地球上に留まり，J君が地球から十分に遠い星Qまで非常に速い宇宙船で往復する場合を考えてみよう（図２－３)。J君は宇宙船に乗って地球に対する速さvで星Qまで行き，Qに着いたらすぐに同じ宇宙船に乗ってやはり地球に対する速さvで戻ってくる。地球に残っているK君の持っている時計で，J君が戻って来るまでの時間を測定したらT_0であったとする。いまJ君はK君に対して速さvで動いているから，J君の持っている時計はK君の持っている時計よりゆっくり進むはずである。J君の時間Tは,（２－１）式より,

$$T=T_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (２－３)$$

しか経過していないから，J 君は K 君より若いと主張する。ところが J 君から見ると，K 君が J 君に対して速さvで動いていると考えられるから，K 君の持っている時計は J 君の持っている時計よりゆっくり進み，K 君の方が時間が少ししか経過していないはずである。そこで，J 君はK君の方が若いと主張する。これは矛盾である。これを「双子のパラドックス」という。

Q：　K 君と J 君の主張はともに正しいのですか。ともに誤りなのですか。それとも，どちらかの主張が誤りなのですか。

A：　将来このような宇宙旅行が実現できれば確かめられることだけれど，J 君の主張が誤りです。このような宇宙旅行をして，K 君と J 君が再会したとすると，K 君の方が年をとっており J 君の方が若いのです。ちょうど「浦島太郎」のようなことが起こるのだよ。

Q：　それはなぜですか。

A：　（２－１）式を用いるとき，α系が慣性系であることに注意しなければなりません。動いている座標系の時間の進み方が遅くなるというのは，１つの慣性系から見たときのものなのです。このとき，β系は慣性系である必要はありません。もちろん，β系が慣性系でなければ，α系から見たβ系の速度が変化するから，β系の時間の遅れの割合は時々刻々変化するけれどね。したがって，K 君はつねに１つの慣性系にいるから，K 君から見た J 君の時間，すなわち，J 君が地球から星 Q に達するまでと，星 Q から地球に戻るまでの時間に対して（２－１）式が適用されることになる。J 君が星 Q に留まる時間はほんのわずかとして無視していいだろう。その結果，K 君の時間T_0と J 君の時間Tの間に（２－３）の関係が成り立つ。ところが，J 君は，地球から星 Q までの間と星 Q から地球までの間では，異なった慣性系にいるのであるから，J 君から見た K 君の時間に対して（2－１）式を適用することはできません。

それでは，J 君から見ると K 君の時間はどうなるのだろう。

Q：　それは，（２－３）とは逆の関係，すなわち，J 君の時間をT，J 君から見た K 君の時間をT_0とすれば，

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad （２－４）$$

となるはずではないですか。

A：　J 君が地球から星 Q に達するまでと，星 Q から地球に達するまでは，J 君は，それぞれ K 君に対する速度vと$-v$の慣性系にいるのだから，J 君から見た K 君の時間に対して（２－１）式が適用されるね。そうすると，J 君の時間Tに対し J 君から見た K 君の時間T_0'は，

$$T_0' = \frac{1}{2}T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2}T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad （２－５）$$

となる。T_0と$T_0^{'}$の差のK君の時間は，J君がどこにいるとき経過するのだろう。

それは，J 君が星 Q において宇宙船の速度の向きを変える瞬間に，K 君の時間は$T_0 - T_0^{'}$だけ経過することになる。宇宙船の速度の向きを変える瞬間，J 君には大きな加速度がはたらくね。実は加速度をもつ座標系は，後に説明する等価原理によると，重力のはたらいている空間に静止している場合に等価であり，慣性系すなわち重力のはたらいていない空間より，時間がゆっくり進む。したがって，宇宙船が速度の向きを変える瞬間，時間が非常にゆっくり進んでいる J 君にとってはほんの一瞬であっても，慣性系にいるK君にとっては長い時間になり，この時間が$T_0 - T_0^{'}$に等しくなるわけです。

Q：　K君とJ君が再会したとき，２人の年の差はどのくらいになるのだろう。

A：　例えば，星Qが地球から８光年の距離（光が８年かかって到達する距離）にあるとし，宇宙船の速さvを$v = \frac{4}{5}c$とすると，２人が再開するまでのK君の時間T_0は，

$$T_0 = \frac{8c}{v} = \frac{8c}{\frac{4}{5}c} = 10 \text{〔年〕}$$

となる。また，（２－３）式から，

$$T = T_0\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}T_0$$

であるから，２人の年の差は$T_0 - T = 4$〔才〕となる。

§２－３　光のドップラー効果

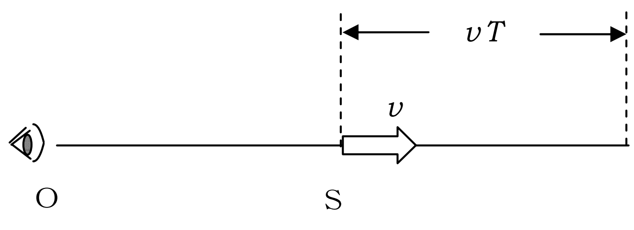


図２－４

高校の物理では，光源の速度が光速に比べ十分に遅い場合に限定して，通常，「光のドップラー効果は音のドップラー効果と同じ式で与えられる」と教えられている。すなわち，光源Sが観測者Oから，速さvで遠ざかると（図２－４），Oが観測する光の振動数fは，Sが発する振動数をf_0，光の速さをcとして，

$$f = \frac{c}{c+v}f_0 \qquad （２－６）$$

と表される[3)]。ただし，光の場合は，音の場合と異なり，光の振動数は光源Sと観測者Oの相対的な運動のみに依存するとして，Sが静止しOが速さvでSから遠ざかっている場合でも，Oが観測する振動数は（２－６）式で与えられる。また，光源Sの速度が観測者Oに対し垂直方向を向いているとき（図２－５），SはSO方向の速度成分をもたないので，Sが発する光の振動数とOが観測する光の振動数に差はなく，ドップラー効果は起きない。

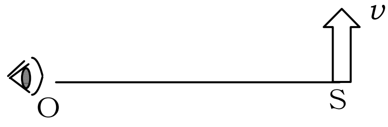


図２－５

ところで，§２－２で説明したように，「光速不変の原理」を用いると，観測者に対して動いている座標系では，観測者から見ると時間はゆっくり進む。このことを考慮すると，動いている光源Sが発する光の周期は，観測者に対して静止しているときに発する光の周期より長くなると考えられそうである。実際に，光のドップラー効果は，相対論ではどのように表されるであろうか。

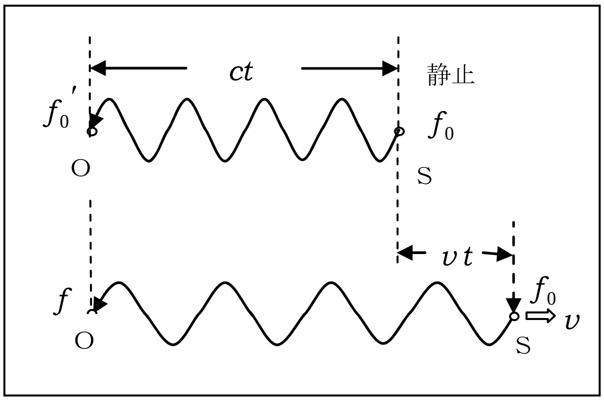
横ドップラー効果

図２－５のように，光源Sが観測者Oに対し，90°をなす方向へ速さvで動きながら光を発する場合を考える。Sが発する光の周期をT_0とすると，T_0は，Sとともに動いている（Sに対して静止している）観測者が見たときの周期である。一方，観測者Oから見ると，

---

3) 高校の物理で音のドップラー効果の式（２－６）は，次のように説明される。

右図のように，音源Sが振動数f_0の連続音を時刻$t=0$から発するとし，静止した観測者OがSからの音を時刻tから聞き始めるとする。いま，音速をcとする。Sが静止しているとき，距離ctのOS間には$f_0 t$個の音の波があるから，音波の波長λ_0は，



$$\lambda_0 = \frac{ct}{f_0 t} = \frac{c}{f_0}$$

である。音波は音速cで伝わるから，観測者Oの聞く音の振動数f_0'は，

$$f_0' = \frac{c}{\lambda_0} = f_0$$

となり，音源Sの発する音の振動数はf_0に等しい。すなわち，ドップラー効果は起きない。

Sが速さvでOから遠ざかるとき，OS間の距離は$ct+vt$となり，その間に$f_0 t$個の波があるから，音波の波長λは，

$$\lambda = \frac{ct+vt}{f_0 t} = \frac{c+v}{f_0}$$

である。観測者Oの聞く音の振動数fは，

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c+v} f_0$$

となり，（２－６）式が得られる。

Oに対して動いている座標系では時計（時間）はゆっくり進む。ゆっくり進む時計でT_0の時間は，Oから見るとT_0より長くなり，

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2-7)$$

となる。光源Sと観測者Oの距離は変化しないから，（２－７）式で与えられる時間Tが，観測者Oから見た光源Sの発する光の周期である。Oが観測する振動数fは，$f=\frac{1}{T}$，

$f_0=\frac{1}{T_0}$を用いて，

$$\boxed{f=f_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2-8)$$

となる。ここで，光源の速さが光速より十分に遅い（$v \ll c$）として$\frac{v}{c}$の２乗の項を無視すれば，$f=f_0$となり，高校の物理で教えられる結果に一致する。

縦ドップラー効果

図２－４のように，光源Sが観測者Oに対し，速さvで遠ざかりながら光を発する場合を考える。観測者Oが静止している座標系で考えて，Sが発する光の周期は（２－７）式で与えられるTであるから，その間，SはvTだけ遠ざかる。したがって，観測される周期T'は，Tと距離vTを光が伝わるのにかかる時間の和

$$T'=T+\frac{vT}{c}=\left(1+\frac{v}{c}\right)T$$

となる。ここで，時間の遅れを無視すれば（$v \ll c$として$\frac{v}{c}$の２乗の項をおとす），$T \to T_0$とすることができ，振動数が周期の逆数であることを用いると，（２－６）式が得られる。時間の遅れを考慮して，Tに（２－７）式を代入すると，

$$T'=\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

となる。これより，Oで観測される光の振動数f'は,

$$\boxed{f'=\frac{1}{T'}=f_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}} \qquad (2-9)$$

となる。

最後に，$\dfrac{v}{c}$ の１次の項までの近似で，（２－９）式が（２－６）式に一致することを確かめておこう。第１章で用いた近似公式

「$|x| \leqq 1$ のとき，$(1+x)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha x$　　（α ：実数）」

を用いると，光源の速さ v が光速 c より十分に遅いとき（$v \ll c$），（２－９）式で与えられる振動数 f' は，

$$f' \fallingdotseq f_0\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)^2} = \left(1-\frac{v}{c}\right)f_0 \qquad （２－10）$$

と近似される。一方，動いている光源における時間の遅れを考慮しない（相対論を考慮しない）とき，O で観測される光の振動数 f は，（２－６）式より，

$$f = \frac{f_0}{1+\dfrac{v}{c}} \fallingdotseq \left(1-\frac{v}{c}\right)f_0$$

となり，近似的に $f' = f$ となる。

§２－４　ガリレイ変換とニュートン力学

従来から知られていた古典力学における座標変換を考える。ローレンツ変換（次節で説明する予定）を導く場合と異なり，ここでは，日常経験からくる直観に頼った議論をする。

１つの慣性系（α 系）（x, y, z）に対し，もう１つの慣性系（β 系）（x', y', z'）が，x 軸を x' 軸に一致させ，各座標軸を平行に保ったまま一定の相対速度 v で，x 軸の正の向きへ動いている場合（図２－６）を考えよう。α 系と β 系で時間の進み方が同じであり，長さにも変化がないと仮定する。時刻 $t=0$ において，α 系と，β 系の原点が一致した（すなわち，各座標軸が一致した）とき，時刻 t における α 系と β 系の座標の間に，

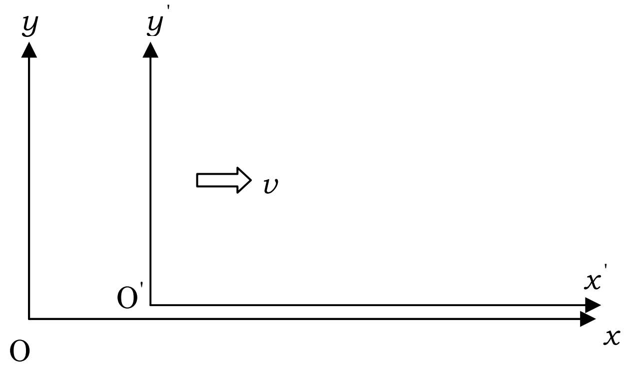


図２－６

$$x' = x - vt \qquad （２－11ａ）$$

$$y' = y \qquad （２－11ｂ）$$

$$z' = z \qquad （２－11ｃ）$$

の関係が成立することは，図２－６より明らかである。これらの関係式（２－11ａ～ｃ）

を**ガリレイ変換**という。

物体の時刻tにおけるα系での速度と加速度をそれぞれ（v_x, v_y, v_z）と（a_x, a_y, a_z），β系での速度と加速度をそれぞれ（v'_x, v'_y, v'_z）と（a'_x, a'_y, a'_z）とすると，（２－11ａ～ｃ）より，

$$(v'_x, v'_y, v'_z) = (v_x - v, v_y, v_z) \qquad (2-12)$$

および

$$(a'_x, a'_y, a_z') = (a_x, a_y, a_z) \qquad (2-13)$$

が成り立つ。

いま，α系で物体にはたらく力を（F_x, F_y, F_z）とすると，α系でニュートンの運動方程式は，

$$(ma_x, ma_y, ma_z) = (F_x, F_y, F_z) \qquad (2-14)$$

である。

物体の質量mは物体に固有のものであり，α系と，β系で同じであると考えられる。また，β系の力（F'_x, F'_y, F'_z）がα系の力に等しい

$$(F'_x, F'_y, F'_z) = (F_x, F_y, F_z) \qquad (2-15)$$

とすると[4)]，（２－13）～（２－15）式から，β系の運動方程式はα系のものと同じ形

$$(ma'_x, ma'_y, ma'_z) = (F'_x, F'_y, F'_z) \qquad (2-16)$$

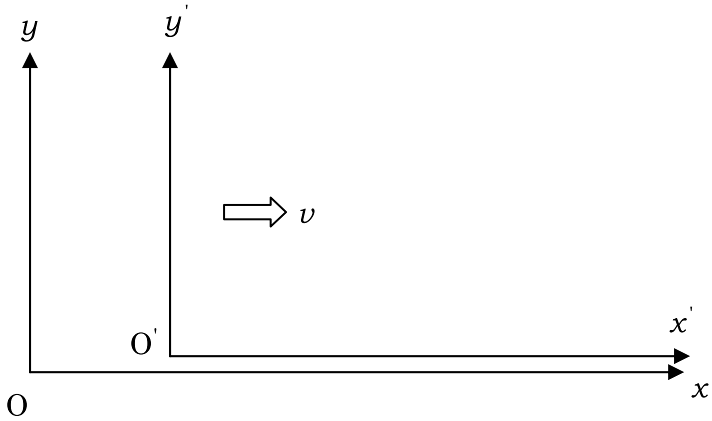
で書けることがわかる。

さらに，運動の第１法則（慣性の法則）および第３法則（作用・反作用の法則）は，α系とβ系で同じ形に書かれることは明らかである。また，速さvの値は任意であるから，ニュートン力学では

$\boxed{\text{力学の法則は，あらゆる慣性系において同じ形に表される}}$

といえる。これを**ガリレイの相対性原理**という。

4）　α系とβ系で力が等しいことは明らかではないが，ここでは，常識的に（我々の日常経験に照らして）このことが成り立っているとする。後に説明するが，相対論では（厳密には），α系とβ系で力は異なる。


y
y'
v
O'
x'
O
x