# 付　録　2

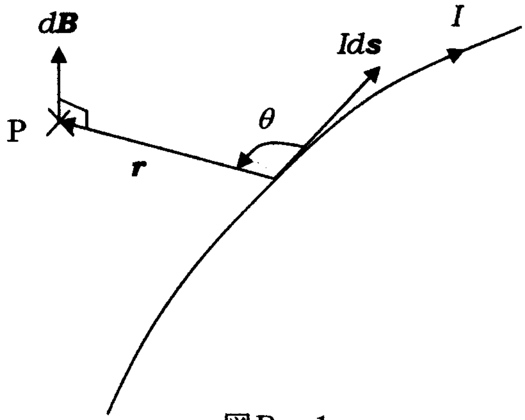
## ［B］ビオ・サバールの法則

電流のつくる磁場に関して，微分形で書かれ計算に便利なものとしてビオ・サバールの法則がある。この法則は，多くの実験結果をまとめることにより得られたものであり，次のように表される。

図B－1のように，真空中で，強さ$I$の電流が任意の形をした導線を流れているとき，電流素片(導線に沿った微小なベクトル$\boldsymbol{ds}$を流れる電流）$I\boldsymbol{ds}$が1点Pにつくる磁束密度$\boldsymbol{dB}$は，

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 I\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \qquad \text{(B－1 a)}$$

で与えられる。ここで，$\mu_0$は真空の透磁率である。また，$\boldsymbol{r}\,(|\boldsymbol{r}|=r)$は，電流素片のある点から点Pに到るベクトルであり，$\boldsymbol{dB}$の大きさ$dB$は，$\boldsymbol{ds}$と$\boldsymbol{r}$のなす角を$\theta$，$|\boldsymbol{ds}|=ds$として，



図B－1

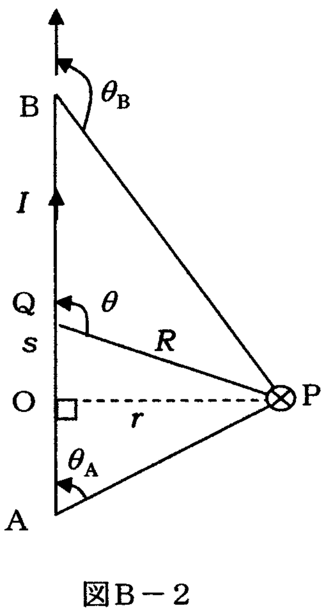
$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{(B－1 b)}$$

である。

ビオ・サバールの法則を用いると，原理的には，どんな形に流れている電流のつくる磁場でも，すべて計算で求めることができる。高校の物理で公式として習ういくつかのものは，簡単な計算でビオ・サバールの法則から求められる。

### 例1　直線電流のつくる磁場

図B－2のように，真空中で，点Aから点Bまで直線状に流れている強さ$I$の電流が点Pにつくる磁束密度$\boldsymbol{B}_{AB}$を求めよう。点Pから線分ABにおろした垂線の足をO，AB上の任意の点をQとする。OPの長さを$r$，QPの長さを$R$，QPと電流のなす角を$\theta$とする。点Oを原点とし，AからBの向きに座標軸をとり，点Qの座標を$s$とする。点Qを流れる電流素片$Ids$が点Pにつくる磁束密度の大きさ$dB$は，ビオ・サバールの法則(B－1 b)式より，



図B－2

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi R^2} ds$$

と書ける。したがって，A，B 間の電流のつくる磁束密度の大きさ $B_{AB}$ は，

$$B_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_A^B \frac{I \sin\theta}{R^2} ds \qquad (B-2)$$

となる。ここで，$s = -\frac{r}{\tan\theta}$ と書けるから，$ds = \frac{r d\theta}{\sin^2\theta}$ が成り立つ。また，$R = \frac{r}{\sin\theta}$ と書けるから，これらを(B－2)式へ代入して，

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_A - \cos\theta_B) \qquad (B-3)$$

を得る。ここで，$\theta_A$ および $\theta_B$ は，AP および BP が電流となす角である。また，$\boldsymbol{B}_{AB}$ は，紙面表から裏の向きとなる。

無限に長い直線電流のつくる磁束密度の大きさ $B$ は，$\theta_A \to 0$，$\theta_B \to \pi$ として，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (B-4)$$

と求められる。$\boldsymbol{B}$ の向きは，電流の流れる向きに進む右ねじの回る向き(右ねじの法則)である。

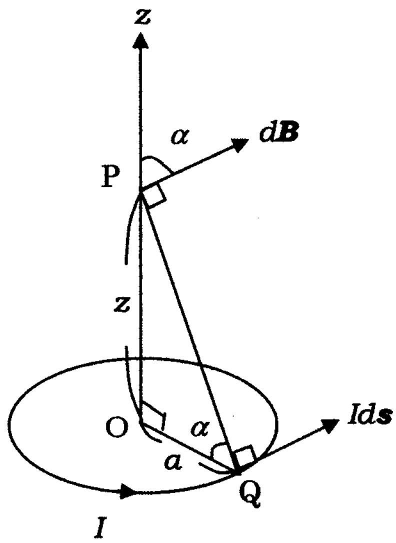
**例2　円電流のつくる磁場**

図B－3のように，真空中で，半径 $a$ の円形状に強さ $I$ の電流が流れているとき，円の中心Oを通り，円を含む平面に垂直な $z$ 軸上にできる磁束密度を求める。

円周上の点Qを流れる電流素片 $I\boldsymbol{ds}$ が，$z$ 軸上の点P(座標 $z$)につくる磁束密度 $\boldsymbol{dB}$ は，三角形OPQを含む平面内でQPに垂直な向きで，ビオ・サバールの法則より，その大きさ $dB$ は，

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{a^2 + z^2}$$

と書ける。$\boldsymbol{dB}$ と $z$ 軸のなす角を $\alpha$ とすると，$\alpha = \angle PQO$ である。$\boldsymbol{dB}$ の $z$ 軸のまわりの対称性を考慮して，円電流のつくる磁束密度の大きさ $B$ は，



図B－3

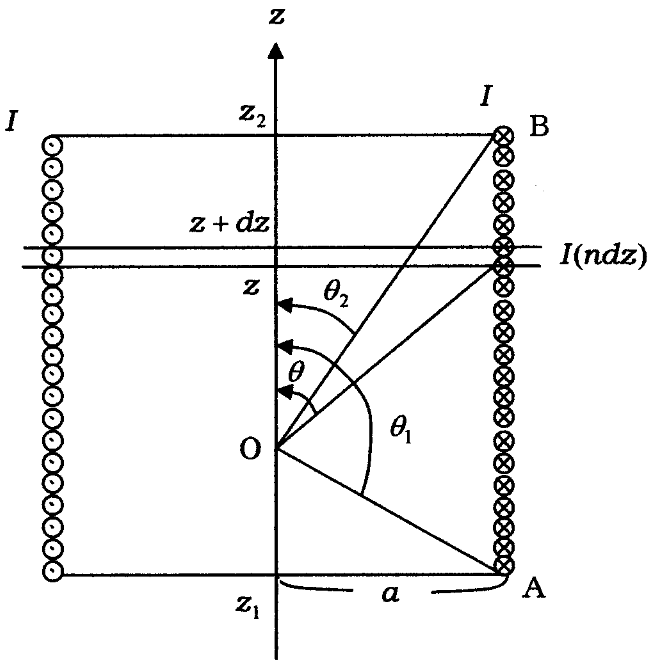
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\cos\alpha}{a^2 + z^2} ds = \frac{\mu_0 I a}{2(a^2 + z^2)} \cos\alpha = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (B-5)$$

となる。$\boldsymbol{B}$ の向きは $z$ 軸方向である。ここで，$z = 0$ のとき，(B－5)式は，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \qquad (\text{B}-6)$$

となる。これは，円電流の中心の磁束密度の大きさである。

**例3　ソレノイドコイル内の磁場**




図B－4

図B－4のように，真空中で，強さ$I$の電流が流れている半径$a$のソレノイドコイルの中心軸($z$軸)上の磁束密度を求める。

コイルの下端Aの$z$座標を$z_1$，上端Bの$z$座標を$z_2$とする。単位長さあたりのコイルの巻き数を$n$とすると，座標$z$と$z+dz$の間を流れる強さ$I(ndz)$の円電流が原点O($z=0$)につくる磁束密度の強さ$dB$は，例2の結果(B－5)式で，$I \to nIdz$として，

$$dB = \frac{\mu_0 a^2}{2} \frac{nIdz}{(a^2+z^2)^{3/2}} \qquad (\text{B}-7)$$

と書ける。

図B－4より，関係式$z = \dfrac{a}{\tan\theta}$が成り立つので，これより，

$$dz = -\frac{a}{\sin^2\theta} d\theta, \qquad a^2 + z^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

を得る。これらを(B－7)式に代入して積分することにより，AからBまでのコイルに流れる電流が，点Oにつくる磁束密度の大きさ$B$は，

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} \int_{z_2}^{z_1} \frac{a^2 dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \qquad (\text{B}-8)$$

となる。ここで，$\theta_1$ と $\theta_2$ は，それぞれ，OA と OB が $z$ 軸となす角であり，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の向きは $z$ 軸正方向である。

コイルが十分に長いとき，$\theta_1 \to \pi$，$\theta_2 \to 0$ として，コイルの中心軸上で，コイルの中程の磁束密度の大きさ $B_1$ は，

$$B_1 = \mu_0 nI \qquad \text{(B}-9\text{)}$$

と求められる。また，コイルの端(例えば下端A)の中心軸上の磁束密度の大きさ $B_2$ は，

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta_2 \to 0$ として，

$$B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 nI$$

と求められる。

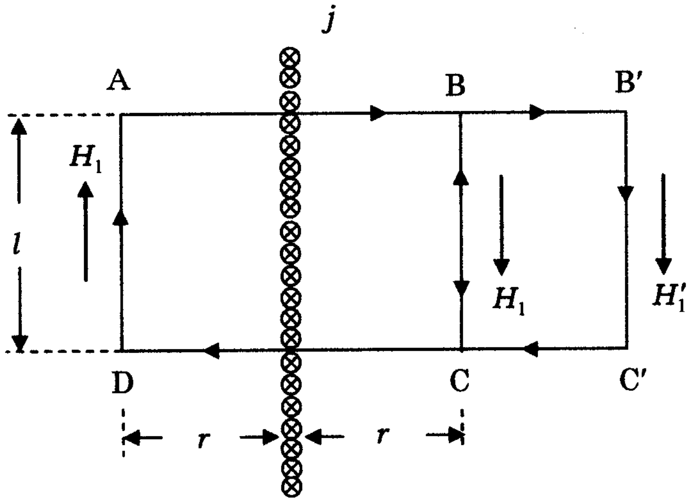
高校の物理において，直線電流のつくる磁場(磁束密度)（B－4)式，円電流の中心の磁場(磁束密度)（B－6)式，十分に長いコイルの中程の磁場(磁束密度)（B－9)式は，それぞれ別々の公式として習うが，ここで説明したように，ビオ・サバールの法則を用いると，系統的に導かれる。

[C] アンペールの法則を用いる具体例

§5－3で説明したように，電流のつくる磁場に関するアンペールの法則は，実際の計算より物理的な概念の理解に適したものであるが，対称性がよい場合,アンペールの法則を用いると，いくつかの対称性のよい電流のつくる磁場を簡単に求めることができる。

**例1　平面電流のつくる磁場**

紙面に垂直に置かれた十分広い平面導体に，紙面に垂直に表から裏の向きに電流密度(平面導体に沿って電流に垂直な単位長さ当たりの電流) $j$ の一様な平面電流が流れているとき，この電流のつくる磁場を求めよう。




図C－1

図C－1のように，平面導体に平行な辺の長さ$l$の長方形の閉回路A→B→C→D→Aに沿って，単位磁荷を一周させるとき，平面電流のつくる磁場のする仕事を考える。平面電流が十分に広くひろがっているとすると，電流のつくる磁場は導体に平行であり，導体の左側では上向き，右側では下向きになる。また空間の対称性より，導体の右側と左側で，導体から同じ距離離れた点の磁場の強さは等しい。いま，辺BCとDAを導体の反対側の等しい距離$r$にとり，それらの辺上での磁場の強さを共に$H_1$とする。辺AB，CDは磁場に垂直であるから，単位磁荷をA→B，C→Dと動かすとき，磁場のする仕事は0である。単位磁荷をB→C，D→Aと動かすとき，磁場のする仕事は共に$H_1 l$である。したがって，単位磁荷をこの閉回路に沿って一周させるとき，磁場のする仕事は$2H_1 l$である。一方，閉回路ABCDを貫く電流は$jl$であるから，アンペールの法則は，

$$2H_1 l = jl$$

と書ける。したがって，辺BC，DA上の磁場の強さは，

$$H_1 = \frac{1}{2}j \qquad (\text{C}-1)$$

となる。

次に，辺B′C′が辺 BC に平行である長方形の閉回路B→B′→C′→C→Bに沿って単

位磁荷を一周させてみよう。辺B′C′上の磁場の強さを$H_1'$とすると，辺BC上の磁場$H_1$と辺B′C′上の磁場$H_1'$は同じ向きであり，かつ，辺BB′，C′Cは磁場に垂直であるから，このとき磁場が単位磁荷にする仕事は$(H_1' - H_1)l$である。一方，この閉回路を貫く電流は0であるから，アンペールの法則は，

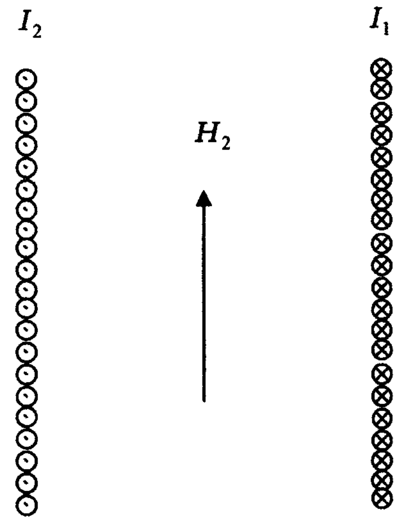
$$(H_1' - H_1)l = 0$$

と書ける。よって，

$$H_1' = H_1 = \frac{1}{2}j$$

となる。辺B′C′と辺BCの距離は任意であるから，平面電流の右側にできる磁場は，下向きでどこでも同じ強さであり，その強さは(C－1)式で与えられる。同様に，平面電流の左側にできる磁場は，上向きでどこでも同じ強さであり，その強さも(C－1)式で与えられる。

**例２　平行で逆向きに流れる平面電流のつくる磁場**




図C－２

図C－２のように，紙面に垂直に平行で逆向きに同じ強さの一様な電流密度$j$の２つの十分に広い平面電流$I_1, I_2$が流れているとき，その周囲にできる磁場を考えよう。

図の右側を流れる電流$I_1$は，例１より，$I_1$の右側で下向きに，その左側で上向きに同じ強さ$H_1$の磁場をつくる。図の左側の電流$I_2$は同様に，$I_2$の右側で上向きに，その左側で下向きに同じ強さ$H_1$の磁場をつくる。それぞれの電流が左右につくる磁場の強さは，電流からの距離によらず一定であるから，$I_1$の右側および$I_2$の左側で磁場は打ち消し合い０となる。一方，$I_1$と$I_2$の間では互いに強め合い，磁場の強さは上向きに，

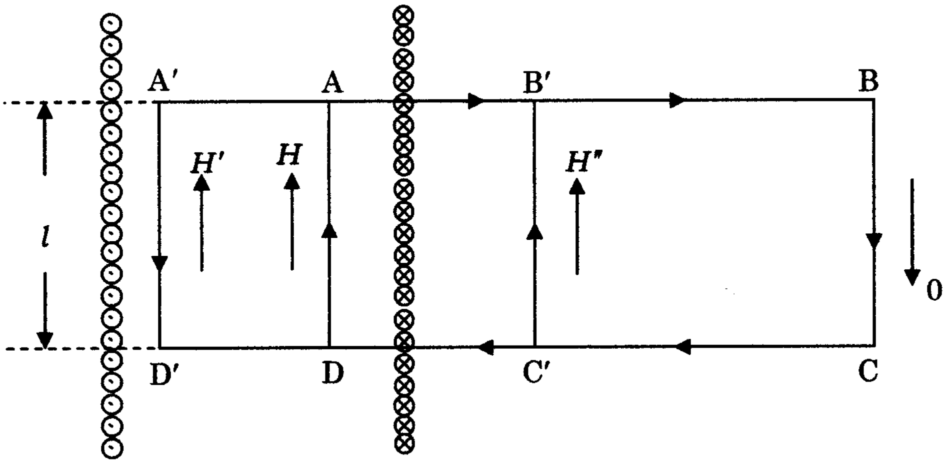
$$H_2 = 2H_1 = j$$

となる。

**例３　ソレノイドコイル内外の磁場**

十分に長いソレノイドコイル内の磁束密度は，アンペールの法則を用いると簡単に求め

ることができる。図C－3のように，強さ$I$の電流が流れている十分に長いコイルを，コイルの直径を含む平面で切った切断面を考える。コイルは十分に長いので，コイルに流れる電流によってつくられる磁場は，すべてコイルに平行である。




図C－3

コイルに平行な辺の長さ$l$の長方形の閉回路A→B→C→D→Aに沿って単位磁荷を一周させるとき，磁場が単位磁荷にする仕事を考える。経路A→BとC→Dは磁場に垂直である(コイルのつくる磁場は，すべてコイルに平行と考えられる)から，単位磁荷がこれらの経路を動くとき磁場のする仕事は0 である。いま辺BCをコイルから無限に遠く離れた位置にとると，無限遠の磁場は0 であるから[1]，単位磁荷をこの長方形の閉回路に沿って一周させるとき，経路D→Aでのみ単位磁荷は磁場から力を受ける。したがって，辺DA上の磁場の強さを$H$とすると，一周の間に磁場が単位磁荷にする仕事は$Hl$である。コイルの単位長さ当たりの巻き数を$n$とすると，閉回路ABCDAを貫く電流は$nlI$であるから，アンペールの法則は，

$$Hl = nlI$$

と書ける。したがって，辺DA上の磁場の強さは上向きに，

$$H = nI \qquad (\text{C}-2)$$

となることがわかる。

次に，コイル内の長方形の閉回路$\text{A} \to \text{A}' \to \text{D}' \to \text{D} \to \text{A}$に沿って単位磁荷を一周させるとき，磁場のする仕事を考える。辺A′D′上の磁場の強さを$H'$とすると，辺AA′とD′Dは磁場に垂直であり，$H$と$H'$は同じ上向きであるから，一周の間に磁場が単位磁荷にする仕事は$(-H'+H)l$である。一方，この閉回路を貫く電流は0だから，アンペールの法則は，

[1] 十分に広い平面電流のつくる磁場は無限遠でも，どこでも同じ強さであり，0ではない。しかし，無限に長いソレノイドのつくる磁場は，無限遠で0である。これは，電荷のつくる電場と同様である。無限に広い平面状に電荷が一様に分布しているとき，電荷のつくる電場はどこでも同じ強さであり，無限遠でも同じである。しかし，直線状に分布した電荷のつくる電場の強さは，直線から離れるにしたがって弱くなり，無限遠では0である。

$$(-H' + H)l = 0$$

となる。よって，$H' = H$ である。辺 A'D' の位置はコイル内のどこでもよいから，コイル内の磁場は上向きで，その強さはどこでも等しく，(C − 2)式で与えられることがわかる。

最後に，コイル外の磁場を考えよう。コイル外に長方形の閉回路 B → C → C' → B' → B をとる。辺 B'B と CC' は磁場に垂直であり，辺 BC 上の磁場は 0 である。辺 C'B' 上の磁場を上向きに $H''$ とすると，この閉回路を貫く電流は 0 であるから，アンペールの法則は，

$$H''l = 0$$

となり，$H'' = 0$ であることがわかる。辺 B'C' の位置は，コイルの外部であれば任意であるから，コイル外部の磁場はすべて 0 である。