

理論第3問 重力場中の中性子

馴染み深い古典論の世界では、地表面ではね返る弾性的なボールの運動は、永久運動の1つの理想的な例である。ボールは地表面の下側や折り返し点の上側へ進むことはなく、跳ね返されたり、跳ね上がったって束縛された状態を永久に保つ。空気抵抗があったり非弾性衝突が起こったりすると、この過程は続かなくなるが、下記において、このようなことは生じないものとする。

2002年、グルノーブルのラウエ・ランジュバン研究所の物理学者グループは、地球の重力場中での中性子の振る舞いに関する実験的な証拠を報告した¹⁾。実験において、右方へ動いている中性子は、中性子鏡として作用する水平な結晶表面に向かって落下し、弾的にはね返り、再びはじめの高さまで戻る。

実験装置は、図1のように、入り口W、高さ $z=0$ にある中性子鏡M、高さ $z=H$ にある長さ L の中性子吸収体A、および、中性子検出器Dからなる。中性子のビームは、水平方向の速度成分 v_x でWから飛び出し、A、M間の空洞を通してDへ飛行する。Aの表面に達した全ての中性子は吸収され、実験装置から消える。Mの表面に達した中性子は弾的に反射される。検出器Dは、到達率 $N(H)$ 、すなわち単位時間あたりDに達する全中性子数、を計測する。

中性子は、正負の広い範囲の値をもつ鉛直な速度成分 v_z で空洞に飛び込む。一度空洞に飛び込むと、それは下面の鏡と上面の吸収体の間を飛行する。

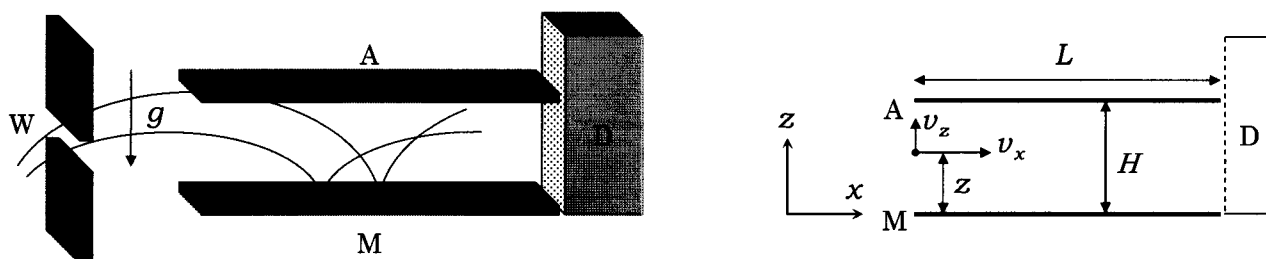


図1

1. 高さ z で入射し、検出器Dに達することのできる中性子の速度の鉛直成分 v_z の範囲を、古典論により求めよ。この問題では、 L は他のどんな長さより十分長いものとする。
2. 上で求めた速度範囲外のすべての中性子が、 z の値にかかわらずAに吸収されるような空洞の長さの最小値 L_c を古典論により計算せよ。ただし、 $v_x = 10 \text{ m/s}$, $H = 50 \text{ } \mu\text{m}$ とする。

中性子の到達率 $N(H)$ は、Dで測定される。それは、 H と共に単調に増加すると考えられる。

¹⁾ V.V.Nesvizhevsky et.al. “地球の重力場中における中性子の量子状態”
Nature, 415(2002)297. Phys.Rev.D67, 102002(2003).

3. 空洞に達する中性子は、高さ z と速度の鉛直成分 v_z をすべて等確率でもつと仮定して、古典論による到達率 $N_c(H)$ を求めよ。答には、高さ z で速度の鉛直成分 v_z をもって空洞に入射する中性子の一定の数密度 ρ (単位時間, 単位速度, 単位高さあたりの中性子数) を用いよ。

グルノーブルのグループによって得られた実験結果は、上の古典論による予言と一致せず、代わりに、 $N(H)$ の値は、高さの臨界値 $H_1, H_2, \dots$ を横切る度にシャープな増加を示した(図 2)。言い換えれば、実験は鏡で跳ね返る中性子の鉛直方向の運動が量子化されることを示した。水素原子のエネルギー準位を求める

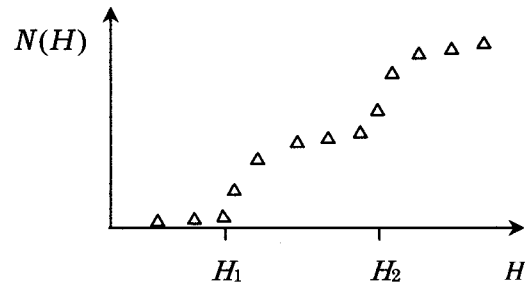


図 2

際にボーアとゾンマーフェルトが用いた言葉を用いると、この条件は、“鉛直方向の運動に関する中性子の作用 S は、プランク定数の整数倍に等しい” となる。ここで S は、

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{ボーア・ゾンマーフェルトの量子条件})$$

と表され、 p_z は古典的な運動量の鉛直成分であり、整数 n はすべてのはね返りのサイクルをカバーする。空洞においては、これらの S の値をもった中性子のみが許される。

4. (鉛直方向の運動に関係した)跳ね返りの高さ H_n とエネルギー準位 E_n を、ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を用いて求めよ。また、 H_1 を μm の単位で、 E_1 を eV の単位で、数値として求めよ。

入射時に一定であった中性子の初期分布 ρ は、長い空洞を飛行する間に、 D で検出される階段状の分布に変化する(図 2)。ここからは、簡単化して $H < H_2$ である長い空洞を考える。古典論では、問 1 で考察した範囲のエネルギーをもったすべての中性子が空洞を通過することができるが、量子力学では、エネルギー準位 E_1 の中性子のみが許される。ハイゼンベルグの不確定性原理にしたがえば、このことは、飛行時間に最小値が存在することを意味する。もし、空洞の長さが短ければ、鉛直方向の運動に関するエネルギーの不確定性が重要になる。この現象はエネルギー準位の広がりを引き起こす。

5. 飛行時間の最小値 t_q 、および、 D において中性子数の最初のシャープな増加を観測する

のに必要な空洞の長さの最小値 L_q を計算せよ。ここで、 $v_x = 10 \text{ m/s}$ とする。

データ：プランク定数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
真空中の光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
電気素量	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
中性子の質量	$M = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
地球上での重力加速度	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$

もし必要ならば, $\int \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}}$ を用いよ。

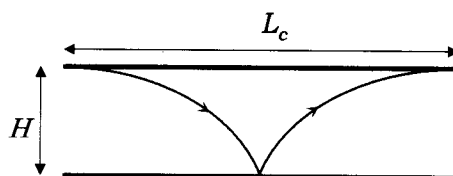
理論第3問 【解答】

重力場中の中性子

1. Aにおいて吸収されずに生き残る中性子は、Mで跳ね返った後の最高点の高さがH未満のものである。中性子の速度の水平成分は変化しないことに注意すると、高さzで鉛直方向の速度成分 v_z をもって入射する中性子の最高点の高さがH未満である条件は、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}Mv_z^2 + Mgz < MgH \quad \therefore \quad -\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}$$

2. 前問1で求めた範囲外の速度成分 $v_z(z)$ をもった中性子が吸収されるためには、空洞内で、中性子が少なくとも1度は最高点に達することが必要である。必要とされる最小の長さ L_c は、 $z=H$ で $v_z=0$ の場合(右図)を考えることにより求められる。高さHの最高点から下面Mまでの落下時間を t_f とすると、



$$L_c = v_x \cdot 2t_f, \quad H = \frac{1}{2}gt_f^2$$

これより t_f を消去して、

$$\begin{aligned} L_c &= 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} \\ &= 2 \times 10 \times \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 10^{-6}}{9.81}} = \underline{6.4 \times 10^{-2} \text{ m}} = \underline{6.4 \text{ cm}} \end{aligned}$$

3. 与えられた高さzで入射する中性子の、単位高さあたりの到達率は、その高さで許される速度範囲に比例するから、比例定数を ρ として、

$$\frac{dN_c(z)}{dz} = \rho[v_{z,\max}(z) - v_{z,\min}(z)] = 2\rho\sqrt{2g(H-z)}$$

到達する中性子の総数は、すべての可能な高さに入射する中性子を加えて得られる。

$y = \frac{z}{H}$ とおいて、

$$\begin{aligned} N_c(H) &= \int_0^H dN_c(z) = \int_0^H 2\rho\sqrt{2g(H-z)} dz = 2\rho\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{1-y} dy \\ &= 2\rho\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\rho\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

4. 高さHから落下する中性子の運動量の鉛直成分 p_z は、エネルギー保存則より、

$$\frac{p_z^2}{2M} + Mgz = MgH \quad \therefore \quad p_z = \pm M\sqrt{2g(H-z)}$$

跳ね返り運動の1サイクルに関する作用 S は、上昇運動の作用の2倍に等しいから、

$$S = 2 \int_0^H M \sqrt{2g(H-z)} dz = 2M \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{1-y} dy = \frac{4}{3} M \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件 $S = nh$ より、 $H \rightarrow H_n$ として、

$$H_n = \left(\frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

対応した(鉛直方向の運動に関係した)エネルギー準位 E_n は、

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9Mg^2h^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

第1エネルギー準位の数値は、

$$H_1 = \left(\frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9 \times (6.63 \times 10^{-34})^2}{32 \times (1.67 \times 10^{-27})^2 \times 9.81} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.65 \times 10^{-5} \text{ m} = \underline{16.5 \mu\text{m}}$$

$$E_1 = MgH_1 = 1.67 \times 10^{-27} \times 9.81 \times 1.65 \times 10^{-5}$$

$$= 2.70 \times 10^{-31} \text{ J} = \underline{1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}}$$

5. 不確定性原理は、最小時間 Δt と最小エネルギー ΔE の間に、関係式 $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ が成り立つことを要求する。ここで、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ である。この時間に、右向きに運動している中性子は、距離

$$\Delta x = v_x \Delta t \geq v_x \frac{\hbar}{\Delta E}$$

だけ進む。いま、空洞内で許される中性子のエネルギーの最小値は E_1 であるから、 $\Delta E \approx E_1$ となる。それゆえ、飛行時間の最小値 t_q と必要とされる空洞の長さの最小値 L_q は、

$$t_q \approx \frac{\hbar}{E_1} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 2.70 \times 10^{-31}} = 3.9 \times 10^{-4} \text{ s} = \underline{0.4 \text{ ms}}$$

$$L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1} = 10 \times \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 2.70 \times 10^{-31}} = 3.9 \times 10^{-3} \text{ m} = \underline{4 \text{ mm}}$$

【参考1】 ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件

1. ボーアの水素原子模型

20世紀初頭、原子がさらに小さな正の電荷をもつ原子核やそのまわりを回る負の電荷をもつ電子からできているという原子模型には、大きな困難があった。古典的な電磁気学によれば、荷電粒子が加速度をもつと、粒子は電磁波を発生する。したがって、原子核のまわりを回る電子は電磁波を発生してエネルギーを失い、ついには原子核に吸収されてしまう。

1913年、ボーア(Bohr)は、原子内の電子に関して、次のことを仮定することにより水素原子の構造を考察し、水素原子から発せられる光のスペクトルを説明することに成功した。

以下、原子核の質量は電子の質量より十分大きく、動かないものとする。

ボーアの仮定

- 1) エネルギーが決まった値をもち安定した定常状態にある電子には、ニュートンの運動方程式が適用できる。
- 2) 電子の定常状態はある量子化条件を満たす。
- 3) 定常状態にある電子は、加速度をもっているが、電磁波を放出しない。
- 4) 電子が1つの定常状態から別の定常状態へ移るとき、そのエネルギー準位の差のエネルギーを、1個の光子として放出したり吸収したりして、電磁波の放出・吸収が起こる。

2. 角運動量保存則と量子条件

原子核のまわりを回る電子には、つねに中心の原子核の向きの力がはたらく。この力は、太陽のまわりを回る惑星にはたらく万有引力と類似した力で、中心力と呼ばれる。粒子に中心力がはたらくとき、その運動における面積速度は一定に保たれる。面積速度に粒子の質量の2倍を乗じた量を角運動量という。したがって、原子核のまわりを回る電子の角運動量は一定に保たれる(保存される)ことになる。

質量 m の電子が中心の原子核から距離 r の円軌道上を速さ v で等速運動するとき、その角運動量は mvr と表される。そこでボーアは、この角運動量が $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h : プランク定数)の整数倍のとき、電磁波を出さないと仮定した。したがってこの場合、ボーアによる量子化条件は、

$$mvr = n\hbar \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \dots\textcircled{1}$$

と表される。

3. 量子化条件の一般化

ボーアの量子化条件を一般化する試みは、プランク(Planck)やゾンマーフェルト(Sommerfeld)等によってなされた。

電子の運動量の大きさを $p = mv$ とすると、①式は、

$$p \cdot 2\pi r = n\hbar$$

と書き直される。ここで、 $2\pi r$ が円軌道の長さであることを考え、この式を、

$$\int_C \vec{p} \cdot d\vec{s} = n\hbar \quad \dots\textcircled{2}$$

と書き直す。ここで、 $\vec{p}$ は電子の運動量ベクトル、 $d\vec{s}$ は電子の軌道 C に沿った微小な接線方向のベクトルであり、積分は軌道 C に沿って一周にわたってとられる。②式を、ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件(以下、簡単のためにBS条件と呼ぶ)という。

4. 調和振動子のエネルギー準位

ここでは、②式を用いる例として、調和振動子(単振動している粒子)の運動を調べてみよう。

質量 m の粒子をばね定数 k のばねに付けて原点 $x=0$ を中心に x 軸上で単振動させる。粒子の位置が x で速度が v のとき、力学的エネルギー E は、 $p=mv$ を用いて、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

と書ける。

粒子の力学的エネルギー E が保存されるとき、縦軸に p 、横軸に x をとって(このように座標軸をとった空間を位相空間という)③式のグラフを描くと図aのようになる。いま、単振動の角振動数 ω を用いて $k=m\omega^2$ とおくと、図aの楕円の長半径(長軸の長さの半分)は $A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ となる。このとき、粒子は、

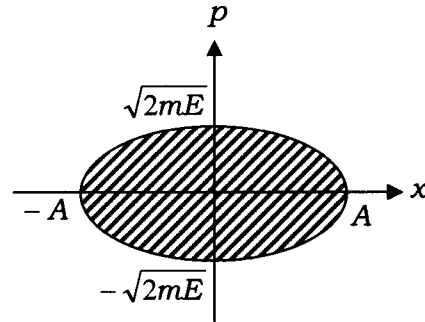


図 a

$x=0$ を中心に、 $x=-A$ と $x=A$ の間で単振動をする。この単振動の軌道が②式の左辺の積分の軌道 C である。

粒子が $x=-A$ から $x=A$ へ運動するとき、位置 x での運動量 p は、③式に A を用いて、 $p>0$ であることから、

$$p = m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

と表される。また、 $x=A$ から $x=-A$ への運動では、

$$p = -m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

となる。したがって、②式は、

$$m\omega \int_{-A}^A \sqrt{A^2 - x^2} dx + \left(-m\omega \int_A^{-A} \sqrt{A^2 - x^2} dx \right) = nh \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。④式の左辺が図aの楕円の面積を表すことは明らかであろう。

これより、BS条件は、「位相空間に描かれた閉軌道内部の面積がプランク定数 h の整数倍に等しい」と言い表すことができる。

図aの楕円の面積は、 $\pi A\sqrt{2mE}$ であるから、④式は、

$$\pi A\sqrt{2mE} = nh$$

となり、粒子の力学的エネルギー E が、振動数 ν を用いて、

$$E = nh \frac{\omega}{2\pi} = nh\nu \quad \dots \textcircled{5}$$

と表されることがわかる。

⑤式は、振動数 ν の調和振動子のエネルギーが $h\nu$ の整数倍に限られることを示している。電磁波も電磁場の調和振動子と考えると、電磁波のエネルギーが $h\nu$ の整数倍に限られることになる。これがプランクの量子仮説である。

【参考2】 不確定性原理

量子力学では、粒子の「位置と運動量」あるいは「時刻とエネルギー」を同時に決めることができないという不確定性原理が成り立つ。粒子の波動性を仮定すると、不確定性関係の成立を自然に理解することができる。

1. 粒子の波動性

1924年、ド・ブローイ(de Broglie)は、元々電磁波という波と考えられていた光が粒子としての性質をもつならば、元々粒子と考えられていた電子、陽子や中性子なども波としての性質をもつのではないかと考えた。そして、粒子性と波動性の間の関係式は、光波と光子の間の関係式と同じではないかと考えた。すなわち、エネルギー E をもつ粒子の振動数 ν は、プランク定数を h として、

$$\nu = \frac{E}{h}$$

運動量 p をもつ粒子の波長 λ は、

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

で与えられるとした。

①式で与えられる波長をもった粒子の波を、物質波あるいはド・ブローイ波という。粒子がこのような波動性をもつことは、結晶に電子線をあてる実験などにより確認された。

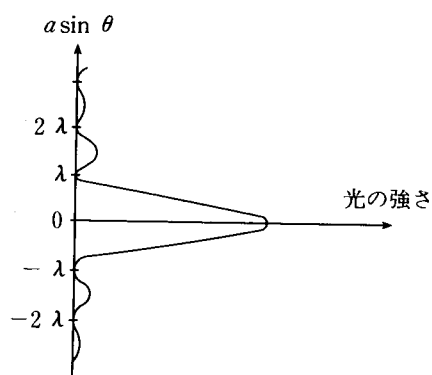
2. 単スリットによる光の回折

幅 a の1つのスリットに、スリットに垂直に左側から波長 λ の光を照射すると、スリットの右側の十分遠いところにスリット面と平行に置かれたスクリーン上に、図bに示すような光の強度分布が現れる。図cにおいて、 θ は回折角である。このような強度分布が現れる理由は、定性的に次のように説明される。

図cのように、スリットABの中点をCとし、点A、C、Bを通り、スリット面で回折角 θ で回折した光を、それぞれ L_1 、 L_2 、 L_3 とする。点Aから光 L_2 へ引いた垂線を AC_1 とする。 CC_1

$= \frac{\lambda}{2}$ となるとき、光 L_1 と L_2 は打ち消すから、

スリットのAC間を通過する光とCB間を通過する光は互いに打ち消す。したがって、回折角 θ の方向のスクリーン上の点は暗くなる。このとき、



図b

$$CC_1 = \frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \therefore a \sin \theta = \lambda$$

が成り立つ。

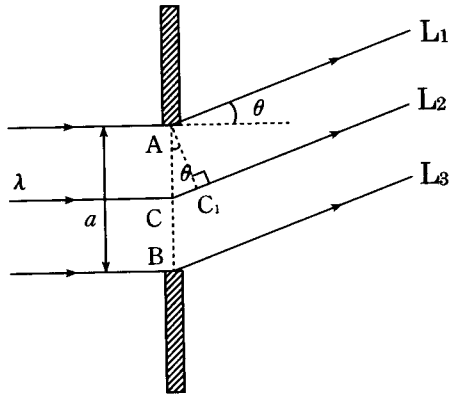


図 c

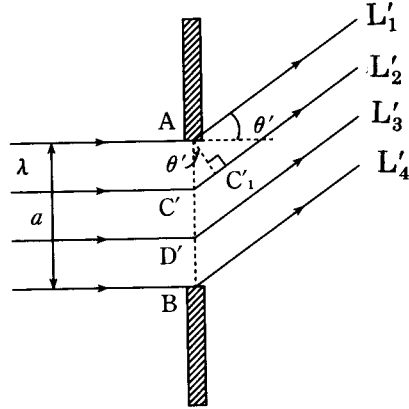


図 d

次に図dのように、スリット AB を3等分した点を、Aに近い方からC'、D'とし、点A、C'、D'、Bを通り、角 θ' で回折する光を L'_1 、 L'_2 、 L'_3 、 L'_4 とする。点Aから L'_2 へ引いた垂線を AC'_1 とする。 $C'C'_1 = \frac{\lambda}{2}$ となる時、光 L'_1 と L'_2 は打ち消すから、スリットのAC'間を通過する光とC'D'間を通過する光は互いに打ち消すが、D'B間の光は打ち消されず残り、角 θ' の方向のスクリーン上の点は少し明るくなる。このとき、

$$C'C'_1 = \frac{a}{3} \sin \theta' = \frac{\lambda}{2} \quad \therefore a \sin \theta' = \frac{3}{2} \lambda$$

が成り立つ。

スリットを k ($k=4,5,6,\dots$)等分し、同様に考えれば、一般的に、回折角 θ に対し、 $n=1,2,3,\dots$ として、

$$a \sin \theta = n\lambda \quad \text{のとき、暗線}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad \text{のとき、弱い明線}$$

となることがわかる。

最後に、明線の明るさについて考えてみよう。

回折角 θ が0から増加するにしたがい、光の強度は1度極小になり、次に $a \sin \theta = \frac{3}{2} \lambda$ のとき極大になる。このとき、スリットを通過する光の $\frac{2}{3}$ は打ち消し、 $\frac{1}{3}$ の光のみが生き残る。光の強度は振幅の2乗に比例すること、および、残った光の位相もずれていることを考慮すると、この位置の光の強度は、 $\theta=0$ の位置の強度の $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$ 倍程度に小さくなる。

以上のことから、スリットを通過した光のほとんどは、 $a|\sin\theta| < \lambda$ の範囲に進むことがわかる。したがって、スリット幅 a が入射光の波長 λ に比べて十分大きければ、ほとんどの光は $\theta \approx 0$ の方向へ進み、光は回折せずに直進する。逆に、スリット幅 a を波長 λ と同程度に小さくすると、光の回折角 θ は大きくなり、 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ の範囲に広がる。

3. 粒子の位置と運動量の間の不確定性関係

スリットに光のかわりにド・ブロイ波をあてるとどのようなことになるかを考えてみよう。幅 Δx のスリットに、大きさ p の運動量をもつ粒子線をあてる思考実験(実際に実験するのではなく、物事を単純化して理論的に考察する実験)を考える(図 e)。

ド・ブロイ波も光と同様の波であるから、スリットに光を照射したときと類似の現象が起こるはずである。すなわち、スリット幅を広くすると、粒子線のド・ブロイ波の直進性が増し、回折角の広がりはいさくなる。逆に、スリットの幅を狭くすると、回折角の広がりはいさくなる。いま、ド・ブ

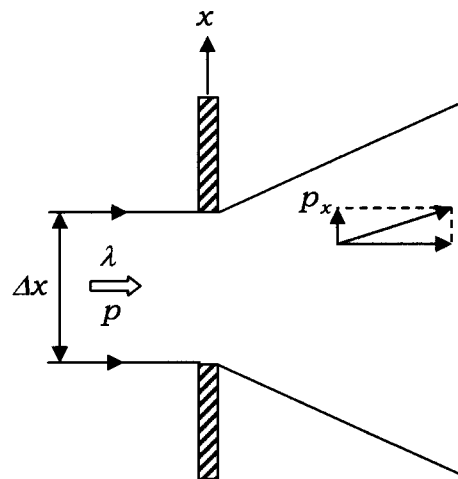


図 e

ロイ波の回折角が 0 ではないということは、スリットに垂直にあてたはずの粒子線の粒子も、スリットを通過するとき、スリットに平行な運動量成分をもつことを意味する。

そこで、粒子がスリットを通過する位置を特定しようと、スリット幅を狭くすると、回折角の広がりはいさくなる、スリットに平行な運動量成分が広がって、定まらなくなる。逆に、スリット幅を広くすれば、スリットに平行な運動量成分の広がりはいさく、運動量のスリットに平行な成分はほとんど 0 に決まってくるが、粒子の通過する位置が特定できなくなる。これは、粒子の位置と運動量を同時に正確に決めることはできないという不確定性原理を表している。

1つの粒子が幅 Δx のスリットを通過するとき、スリットに平行な方向(x 方向)の位置の不確定さは $\sim \Delta x$ である。先に述べた単スリットによる光の回折の考察から、粒子のド・ブロイ波長を λ とすると、粒子は、ほぼ回折角 θ が $\Delta x \sin\theta < \lambda$ を満たす範囲に広がる。したがって、スリットを通過する粒子の回折角 θ は、最大で、

$$\sin\theta \sim \frac{\lambda}{\Delta x}$$

である。よって、スリット間の粒子の運動量の x 成分には、最大で、

$$\Delta p_x = p \sin\theta \sim \frac{p\lambda}{\Delta x}$$

の広がりがあることがわかる。ここで①式を用いると、

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h \quad \dots \textcircled{2}$$

の関係が成り立つことがわかる。②式は x 方向の位置と運動量の不確定性を表す式である。

さらに考察を進めると，時刻と粒子のエネルギーの間にも不確定性関係が成立し，時刻の不確定さ Δt とエネルギーの不確定さ ΔE の間にも，

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h$$

の関係が成り立つことがわかる。