

理論第2問 電氣的物理量の絶対測定

19世紀に発展した科学技術の進歩により、電氣的物理量に対し、普遍的な基本単位の必要性が生じた。新たな絶対単位は、長さ、質量と時間のみに依存すべきであると考えられ、フランス革命以後に確立された。これら単位の値を決めるため、1861年から1912年まで徹底的に実験が行われた。ここでは3つの研究を述べる。以下の実験は空気中で行われるものとし、空気の透磁率を μ_0 とする。

オームの決定(Kelvin)

N 回密に巻いた半径 a の円形コイル(全電気抵抗 R)が、水平な磁束密度 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ ($\vec{i}$ は x 軸方向の単位ベクトル)の磁場に垂直なコイルの直径(z 軸)のまわりに、一定の角速度 ω で回転している(図1)。

1. コイルに生じる誘導起電力 E とコイルを回転させるための平均の仕事率 $\langle P \rangle$ を求めよ。ただし、コイルの自己インダクタンスを無視する。

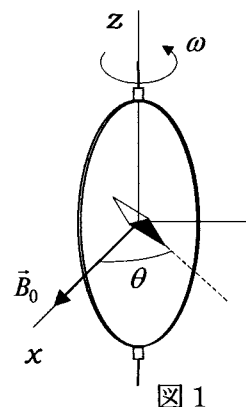


図1に示すように、コイルの中心に小さな磁針が置かれている。この磁針は、水平面上で z 軸のまわりに自由にゆっくりと回転することができるが、コイルの急速な回転にはついていくことができない。

2. 静止状態になったとき、磁針は $\vec{B}_0$ と小さな角 θ をなす方向を向いていた。コイルの抵抗 R を θ の関数として求めよ。

1860年代に、ケルヴィン卿は、抵抗(オーム)の絶対的な基準を決めるために、この方法を用いた。ローレンツは、回転するコイルを避けて、レイリー卿とシドウィック夫人によって用いられた別の方法を工夫した。次に、この方法を分析しよう。

1) 物理量 $X(t)$ の系の1周期 T にわたる平均値 $\langle X \rangle$ は、 $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ で与えられる。その際、必要

に応じて、積分 $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$,

および、 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ を用いよ。

オームの決定(Rayleigh, Sidgwick)

図2に示される実験装置が用いられる。装置は、導電性の軸に取り付けられた半径 b の金属製の2つの同じディスクDとD'からなる。モーターは、角速度 ω で軸とディスクのセットを回転させる。角速度 ω は、 R を測定するように調整される。2つの同じコイル(半径 a で N 回巻き)CとC'がディスクを囲んでいる。C, C'には、逆方向へ電流 I が流れるように接続されている。この装置を用いて抵抗 R を測定する。

3. コイルCとC'は、コイルの中心と同じ強さの一様な磁束密度 B の磁場をDとD'の周囲に生成すると仮定する。コイル間の距離はコイルの半径より十分長く、 $a \gg b$ であるとして、縁1と4の間に生じる誘導起電力 E を求めよ。

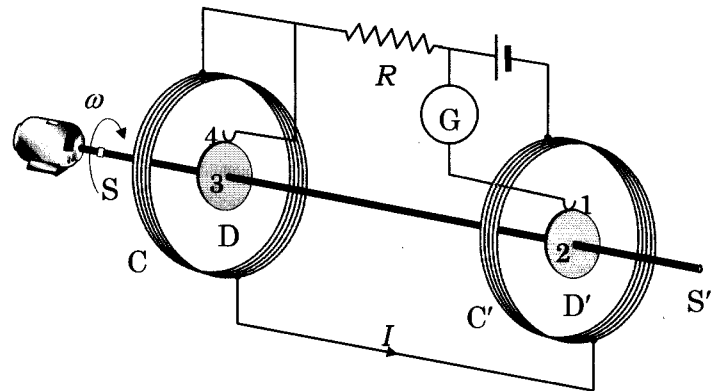


図2

ディスクは縁1と4に接触しているブラシで回路につながれている。検流計Gは、回路1, 2, 3, 4を流れる電流を計測する。

4. 抵抗 R は、Gが0を示すときに求められる。抵抗 R を求めよ。

アンペアの決定

2本の導線を流れる電流とそれらの導線間にはたらく力を測定することによって、電流の絶対値を決定する。1882年にケルビン卿によって示された‘電流天秤’は、この方法を

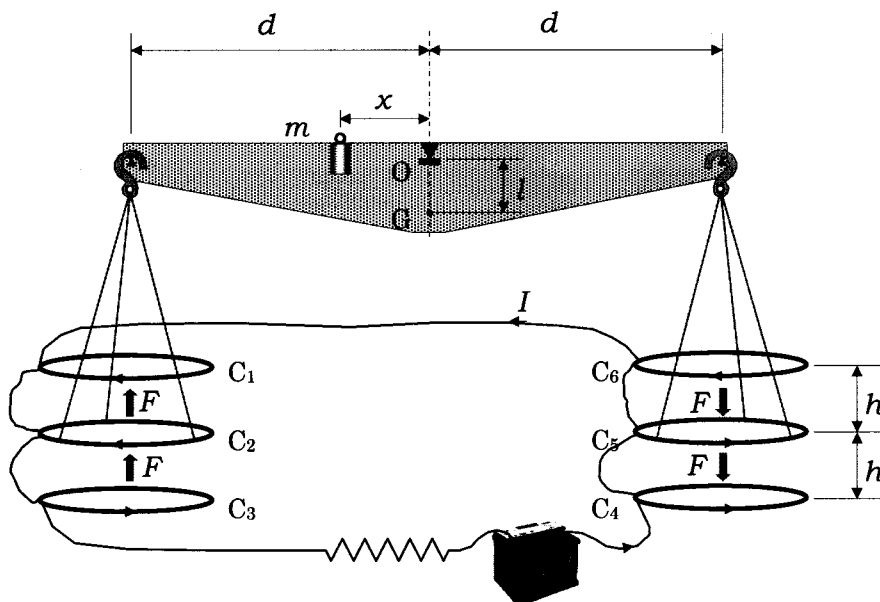


図3

利用している。それは、ひとつながりに結ばれた半径 a の 6 個の同じ 1 回巻きコイルからなる。図 3 に示されるように、微小距離 $2h$ だけ離れた 2 つの水平面上にコイル C_1, C_3, C_4, C_6 が固定されている。コイル C_2 と C_5 は腕の長さ d の天秤棒によって動くことができ、両平面(コイル C_1, C_3 , および C_6, C_4)から等距離の位置でつり合いを保っている。

C_2 には上向きに、 C_5 には下向きに磁気力がはたらくように、各々のコイルに電流 I が流れている。回路に電流が流れるとき、上に述べた平衡位置でつり合いを保つように、支点 O から距離 x の位置に質量 m のおもりを置く。重力加速度の大きさを g とする。

5. C_1 と C_2 の間にはたらく磁氣的相互作用の力 F を求めよ。簡単化のために、単位長さあたりにはたらく力は、電流の流れている長い 2 本の直線導線間にはたらく力と同じとする。
6. 電流 I はつり合いが保たれているときに測定される。電流 I を求めよ。

質量 m のおもりと吊るしている部分の質量を除いた天秤の質量を M 、天秤の質量中心を G 、距離 $\overline{OG}$ を l とする。

7. C_2 の高さが微小量 δz だけ、 C_5 が $-\delta z$ だけ変位しても、天秤は安定である。天秤が放されたとき、なおも平衡位置に戻るような最大変位 $\delta z_{\max}$ を求めよ²⁾。

²⁾ コイルの中心は、近似的に一直線上にあるとせよ。また、近似式

$$\left[\beta \ll 1 \text{ のとき, } \frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2, \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2 \right], \text{ 「小さな } \theta \text{ に対して, } \sin \theta \approx \tan \theta \text{」}$$

を用いよ。

理論第2問 【解答】

電氣的物理量の絶対測定

1. ある時間 t だけたつと、コイル面の法線は、磁束密度 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ と角 ωt をなすとする。

このとき、コイル面の法線ベクトルを $\vec{S} = \pi a^2 (\cos \omega t \cdot \vec{i} + \sin \omega t \cdot \vec{j})$ を用いて、コイルを貫く磁束は、

$$\Phi = N \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = N \pi a^2 B_0 \cos \omega t$$

よって、誘導起電力は、

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{N \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t}{1}$$

コイルを回転させるための平均の仕事率は、平均電力に等しいから、

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \text{ を用いて,}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{R} = \frac{(N \pi a^2 B_0 \omega)^2}{2R}$$

2. コイルに流れる誘導電流は、

$$I = \frac{E}{R} = \frac{N \pi a^2 B_0 \omega}{R} \sin \omega t$$

であるから、誘導電流がコイルの中心につくる磁束密度の大きさは、

$$B_i = N \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \sin \omega t$$

よって、磁束密度の x 成分 $B_{ix} = B_i \cos \omega t$ 、 y 成分 $B_{iy} = B_i \sin \omega t$ の平均値は、それぞれ、

$$\langle B_{ix} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$\langle B_{iy} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R}$$

全磁束密度の x 成分は B_0 、 y 成分は $\frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R}$ であるから、平均の全磁束密度の

方向を向く磁針と $\vec{B}_0$ のなす角 θ の正接は、

$$\tan \theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R} \quad \therefore \quad R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

3. コイルの中心(ディスク D と D' の周囲)にできる磁束密度は、 $B = N \frac{\mu_0 I}{2a}$ である。縁 1

と 4 の間に生じる誘導起電力 E は、ディスクの中心と縁の間に生じる起電力(ディスクの

1つの半径が単位時間に切る磁束)の2倍に等しいから,

$$E = 2 \times \frac{1}{2} b^2 \omega B = b^2 \omega \cdot N \frac{\mu_0 I}{2a} = N \frac{\mu_0 b^2 \omega I}{2a}$$

(別解)

ディスクの中心から距離 r の点に生じる誘導電場の大きさは, その点の速さ $r\omega$ を用いて, $r\omega B$ と表される。これより, 縁 1, 4 間に生じる誘導起電力は,

$$E = 2 \int_0^b r \omega B dr = b^2 \omega B = N \frac{\mu_0 b^2 \omega I}{2a}$$

4. 縁 1, 4 間の誘導起電力が抵抗 R に流れる電流 I による電圧降下に等しくなると, 検流計 G に流れる電流は 0 となる。よって,

$$R = \frac{E}{I} = N \frac{\mu_0 b^2 \omega}{2a}$$

5. 間隔 h を隔てた 2 本の無限に長い平行な直線導線に電流 I_1, I_2 が流れているとき, 平行導線間にはたらく単位長さあたりの力 f は,

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi h}$$

と表される。これより, $I_1 = I_2 = I$ とコイルの長さ $2\pi a$ を用いて, コイル C_2 に C_1 から はたらく力 F は,

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 a}{h} I^2$$

6. 支点 O のまわりのモーメントのつり合いより,

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 ad}{h} I^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mghx}{\mu_0 ad}}$$

7. 平衡位置からのずれが δz のとき, コイル C_2 に C_1 および C_3 から はたらく力の大きさは, それぞれ $\frac{\mu_0 a}{h - \delta z} I^2$, $\frac{\mu_0 a}{h + \delta z} I^2$ である。コイルのずれが δz のとき, 天秤の腕の水平面からのずれの角を $\delta\varphi$ とする。元の位置に戻るための条件は, 支点 O のまわりのモーメントを用いて,

$$\begin{aligned} Mgl \sin \delta\varphi + mgx \cos \delta\varphi &> 2\mu_0 a I^2 \left(\frac{1}{h - \delta z} + \frac{1}{h + \delta z} \right) d \cos \delta\varphi \\ &\approx \frac{4\mu_0 ad I^2}{h} \left\{ 1 + \left(\frac{\delta z}{h} \right)^2 \right\} \cos \delta\varphi \end{aligned}$$

と表される(次図)。ここで, 与えられた近似式より,

$$\frac{1}{h \pm \delta z} = \frac{1}{h \left(1 \pm \frac{\delta z}{h}\right)} \approx \frac{1}{h} \cdot \left\{ 1 \mp \frac{\delta z}{h} + \left(\frac{\delta z}{h}\right)^2 \right\}$$

となることを用いた。さらに、①式と $\cos \delta\varphi \approx 1$, $\sin \delta\varphi = \frac{\delta z}{d}$ を用いて、

$$Mgl \frac{\delta z}{d} > mgx \left(\frac{\delta z}{h}\right)^2 \quad \therefore \quad \delta z < \frac{Mlh^2}{mxd} = \delta z_{\max}$$

