IPhO2005(Salamanca,Spain)

理論第１問　不運な衛星

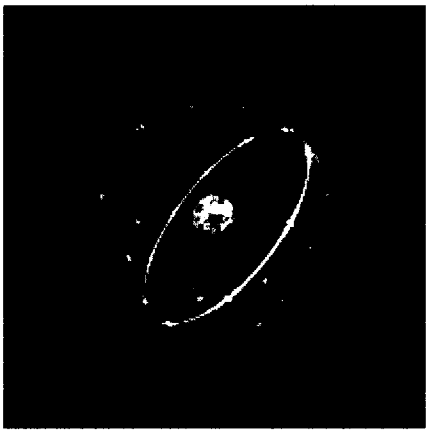

Image: ESA

より高い軌道に乗せるためであったり，あるいは，大気圏への再突入を図るための減速であったり，宇宙船で最も煩瑣に行われる軌道修正は，飛行の進行方向に沿った速度の変更である。この問題では，エンジン噴射による撃力が半径方向へ加えられる場合の軌道変更を調べよう。

必要に応じて，地球の半径 $R_T = 6.37\times10^6$ m，地表面での重力加速度 $g = 9.81$ m/s²，および，恒星日 [1] の長さ $T_0 = 24.0$ 時間を用いよ。

半径 r_0 の赤道面上の円軌道を回る質量 m の静止通信衛星を考える。これらの衛星は，最終軌道に到達するのに必要な軌道の接線方向へ撃力を加える“アポジー・エンジン”を備えている。

問題１

1.1　半径 r_0 を数値で求めよ。

1.2　衛星の速さ v_0 を g，R_T および r_0 を用いて表せ。また，その数値を求めよ。

1.3　衛星の角運動量 L_0 と力学的エネルギー E_0 を，v_0，m，g および R_T を用いて表せ。

この静止円軌道に乗った衛星は，望ましい位置に移動し，その仕事を始める準備をしているとき，地上の管制官の過ちで再びアポジー・エンジンが点火された。地上のクルーのすばやい対応でエンジンは止められたが，地球に直接向かう向きに撃力が加えられ，不本意な速度変更 Δv が衛星に与えられた(図１)。この噴射を，パラメータ $\beta = \dfrac{\Delta v}{v_0}$ を用いて調べよう。エンジン噴射の時間は瞬時であり，他の軌道運動の時間に比べて無視できるものとする。

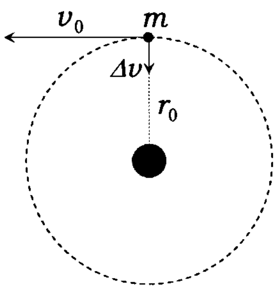

図１

問題２

$\beta < 1$ とする。

2.1　新たな軌道のパラメータ [2] である*半通径*(焦点を通り軸に垂直な弦の長さの半分) l と離心率 ε を r_0 と β で表せ。

2.2　新たな軌道の長軸とミス点火のあった点の位置ベクトルのなす角 α を求めよ。

2.3　地球の中心から近地点(最も近い軌道上の点)までの距離 r_{min} と，遠地点(最も遠い軌道

---

[1] 衛星の回転周期は T_0 である。

[2] ヒントを見よ。

上の点)までの距離$r_{\max}$をr_0とβの関数として表し，$\beta=\dfrac{1}{4}$の場合の$r_{\min}$と$r_{\max}$を数値で求めよ。

2.4　新たな軌道の周期TをT_0とβの関数として表し，$\beta=\dfrac{1}{4}$の場合のTを数値で求めよ。

問題3

3.1　衛星が地球の重力圏から脱するのに必要な最小のパラメータ$\beta=\beta_{\mathrm{esc}}$を求めよ。

3.2　この場合，新たな軌道の地球の中心までの最接近距離$r'_{\min}$を，r_0の関数として求めよ。

問題4

$\beta>\beta_{\mathrm{esc}}$とする。

4.1　無限遠における速度v_∞を，v_0とβの関数として求めよ。

4.2　脱出方向の漸近的な衝突パラメータbを，r_0とβを用いて求めよ(図2)。

4.3　脱出方向の漸近的な角ϕを，βを用いて表せ。また，$\beta=\dfrac{3}{2}\beta_{\mathrm{esc}}$の場合の$\phi$を数値で求めよ。

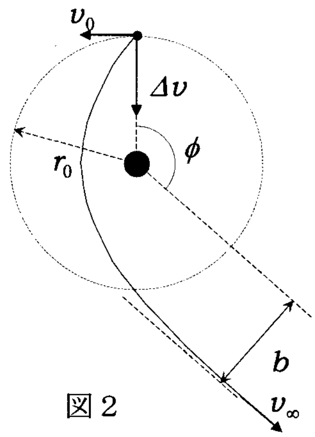

図2

ヒント

逆2乗則にしたがう中心力を受けた物体は，楕円，放物線，あるいは双曲線の軌跡を描いて運動する。$m<<M$のとき，重力を及ぼす質量Mは，焦点の1つにある。この焦点を原点にとると，これらの曲線の極方程式は，

$$r(\theta)=\frac{l}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

と表される(図3)。ここで，lは*半通径*と呼ばれる正の定数で，εは曲線の離心率であり，運動の定数を用いて，

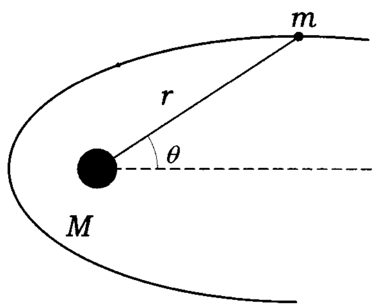

図3

$$l=\frac{L^2}{GMm^2},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

と表される。ここで，Gはニュートン定数(万有引力定数)，Lは軌道運動している質量の，原点に関する角運動量の大きさであり，Eは，無限遠を位置エネルギーの基準としたときの力学的エネルギーである。

この運動は，次のように分類される。

i)　$0\le\varepsilon<1$のとき，曲線は楕円($\varepsilon=0$のときは円)。

ii)　$\varepsilon=1$のとき，曲線は放物線。

iii)　$\varepsilon>1$のとき，曲線は双曲線。

理論第1問　【解答】

不運な衛星

1.1, 1.2

地球の質量をM_T，万有引力定数をGとすると，地球のまわりを運動している質量mの衛星の円運動の運動方程式は,

$$m\frac{v_0^2}{r_0}=G\frac{M_T m}{r_0^2} \qquad \cdots①$$

衛星は等速円運動をするから,

$$v_0=\frac{2\pi r_0}{T_0} \qquad \cdots②$$

地球が自転している影響を無視すると，地表面で衛星にはたらく重力は，地球からはたらく万有引力に等しいから,

$$mg=G\frac{M_T m}{R_T^2} \quad \therefore \quad gR_T^2=GM_T \qquad \cdots③$$

①，③式よりGM_Tを消去して,

$$\underline{v_0=R_T\sqrt{\frac{g}{r_0}}} \qquad \cdots④$$

②，④式よりv_0を消去して,

$$r_0=\left(\frac{gR_T^2T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$=\left(\frac{9.81\times(6.37\times10^6)^2\times(24\times60\times60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}=\underline{4.22\times10^7\ \mathrm{m}}$$

これを④式へ用いて,

$$v_0=6.37\times10^6\times\sqrt{\frac{9.81}{4.22\times10^7}}=\underline{3.07\times10^3\ \mathrm{m/s}}$$

1.3

④式は，$r_0=\dfrac{gR_T^2}{v_0^2}$と書けるから，衛星の角運動量$L_0$は,

$$L_0=mv_0r_0=mv_0\frac{gR_T^2}{v_0^2}=\underline{\frac{mgR_T^2}{v_0}}$$

①式を用いて，衛星の力学的エネルギーE_0は,

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GM_Tm}{r_0}=\frac{1}{2}mv_0^2-mv_0^2=\underline{-\frac{1}{2}mv_0^2}$$

2.1

アポジー・エンジンによって与えられた撃力は中心力であるから，軌道角運動量は保存

する。よって，半通径lの値は，

$$l=\frac{L_0^2}{GM_{\mathrm{T}}m^2}=\frac{m^2g^2R_{\mathrm{T}}^4}{v_0^2}\frac{1}{gR_{\mathrm{T}}^2m^2}=\frac{gR_{\mathrm{T}}^2}{v_0^2}=\underline{r_0} \qquad \cdots⑤$$

衛星の新たな力学的エネルギーEは，

$$E=\frac{1}{2}m\{v_0^2+(\Delta v)^2\}-\frac{GM_{\mathrm{T}}m}{r_0}=\frac{1}{2}m(\Delta v)^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2\left\{\frac{(\Delta v)^2}{v_0^2}-1\right\}=\frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2-1) \qquad \cdots⑥$$

と表されるから，離心率は，

$$\varepsilon^2=1+\frac{2EL_0^2}{G^2M_{\mathrm{T}}^2m^3}=1+\frac{mv_0^2(\beta^2-1)}{g^2R_{\mathrm{T}}^4m^3}\frac{m^2g^2R_{\mathrm{T}}^4}{v_0^2}=\beta^2$$

$$\therefore \quad \varepsilon=\underline{\beta} \qquad \cdots⑦$$

$\varepsilon=\beta<1$より，この場合，衛星は楕円軌道を描く。

2.2

噴射点Pにおける値$r=r_0$，$\theta=\alpha$および⑤式を，新たな軌道の極方程式に代入して，

$$r_0=\frac{r_0}{1-\varepsilon\cos\alpha} \quad \therefore \quad \alpha=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

2.3

楕円軌道の極方程式より，遠地点までの距離$r_{\max}$と近地点までの距離$r_{\min}$は，それぞれ$\theta=0$，$\theta=\pi$のときに与えられる(図4)。よって，

$$r_{\max}=\frac{l}{1-\varepsilon}=\underline{\frac{r_0}{1-\beta}}$$

$$=\frac{4.22\times10^7}{1-\frac{1}{4}}=\underline{5.63\times10^7\ \mathrm{m}}$$

$$r_{\min}=\frac{l}{1+\varepsilon}=\underline{\frac{r_0}{1+\beta}}$$

$$=\frac{4.22\times10^7}{1+\frac{1}{4}}=\underline{3.38\times10^7\ \mathrm{m}}$$

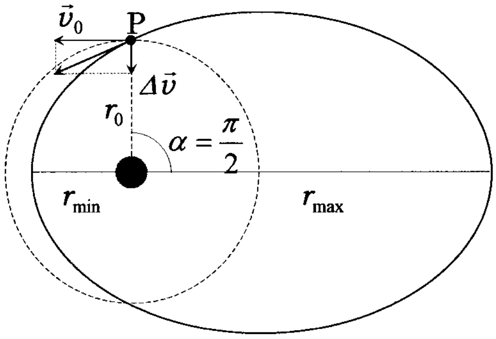

図4

2.4

楕円軌道の長半径(長軸の長さの半分)aは，

$$a=\frac{r_{\max}+r_{\min}}{2}=\frac{r_0}{1-\beta^2}$$

と表されるから，ケプラーの第3法則より，楕円軌道の周期Tは，

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_0^2}{r_0^3}$$

$$\therefore\quad T=T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}=\underline{T_0(1-\beta^2)^{-3/2}}$$

$$=24\times\left(1-\frac{1}{16}\right)^{-3/2}=\underline{26.4\ \mathrm{h}}$$

3.1

衛星が地球の重力圏から脱出するには，軌道が開かれ，放物線あるいは双曲線であればよい。よって，離心率の最小値は1であるから，⑦式より，

$$\beta_{\mathrm{esc}}=\underline{1}$$

(別解)

地球の重力圏から脱するためのβの最小値β_{esc}は，衛星の力学的エネルギーが0という条件によっても与えられる。よって，⑥式を用いて，

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\mathrm{esc}}^2-1)=0\quad\therefore\quad\beta_{\mathrm{esc}}=1$$

このことは，また，$T=\infty$あるいは$r_{\max}=\infty$より求めることもできる。

3.2

極方程式に$l=r_0$，$\varepsilon=1$を代入して，

$$r=\frac{r_0}{1-\cos\theta}$$

これより，地球の中心までの最小距離$r'_{\min}$は，$\theta=\pi$として，

$$r'_{\min}=\underline{\frac{r_0}{2}}$$

この結果は，近地点での力学的エネルギーが0であること(力学的エネルギー保存則)と，角運動量がmv_0r_0に等しいこと(角運動量保存則)からも得ることができる。

4.1

無限遠では，位置エネルギーが0であるから，無限遠での速度v_∞は，力学的エネルギー保存則より，

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2-1)=\frac{1}{2}mv_\infty^2\quad\therefore\quad v_\infty=\underline{v_0\sqrt{\beta^2-1}}$$

4.2

衛星の角運動量保存則より(図5)，

$$mv_0r_0=mv_\infty b\quad\therefore\quad b=r_0\frac{v_0}{v_\infty}=\underline{\frac{r_0}{\sqrt{\beta^2-1}}}$$

4.3

脱出方向の漸近的な偏角θ_{asym}は，極方程式で$r\to\infty$とすることにより求められる。よって，

$$1-\beta\cos\theta_{\text{asym}}=0$$

$$\therefore\quad \theta_{\text{asym}}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

図５より，

$$\phi=\frac{\pi}{2}+\theta_{\text{asym}}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$

最後に，$\beta=\dfrac{3}{2}\beta_{\text{esc}}=\dfrac{3}{2}$ を代入して，

$$\phi=\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

$$=\underline{2.41\,\text{rad}}=\underline{138^\circ}$$

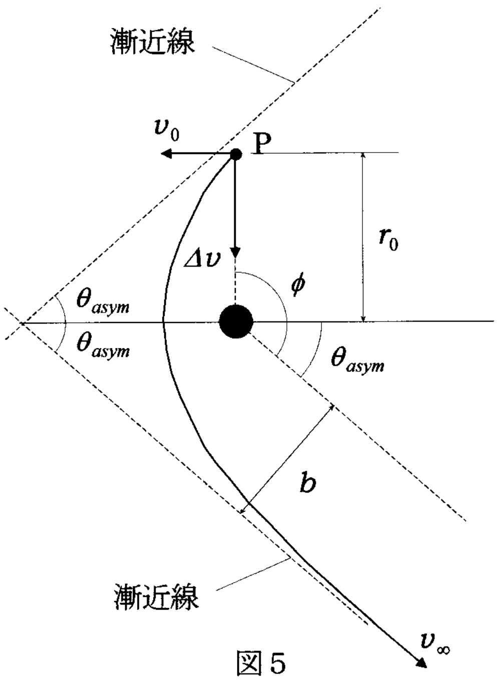

図５