

理論第3問

原子プローブ顕微鏡

原子プローブ顕微鏡(APM)はナノ科学の分野で強力な道具である。図3.1に示されているように、APMでは、カンチレバーの動きが、反射されたレーザー光を光検出器でモニターすることによって検出される。カンチレバーは鉛直方向にのみ動き、その変位 z は、時刻 t の関数として、方程式

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F \quad \dots(3.1)$$

を満たす¹⁾。ここで、 m はカンチレバーの質量、 $k = m\omega_0^2$ はカンチレバーの弾性定数、 b は $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$ を満たす減衰係数であり、 F は圧電管による外部強制力である。

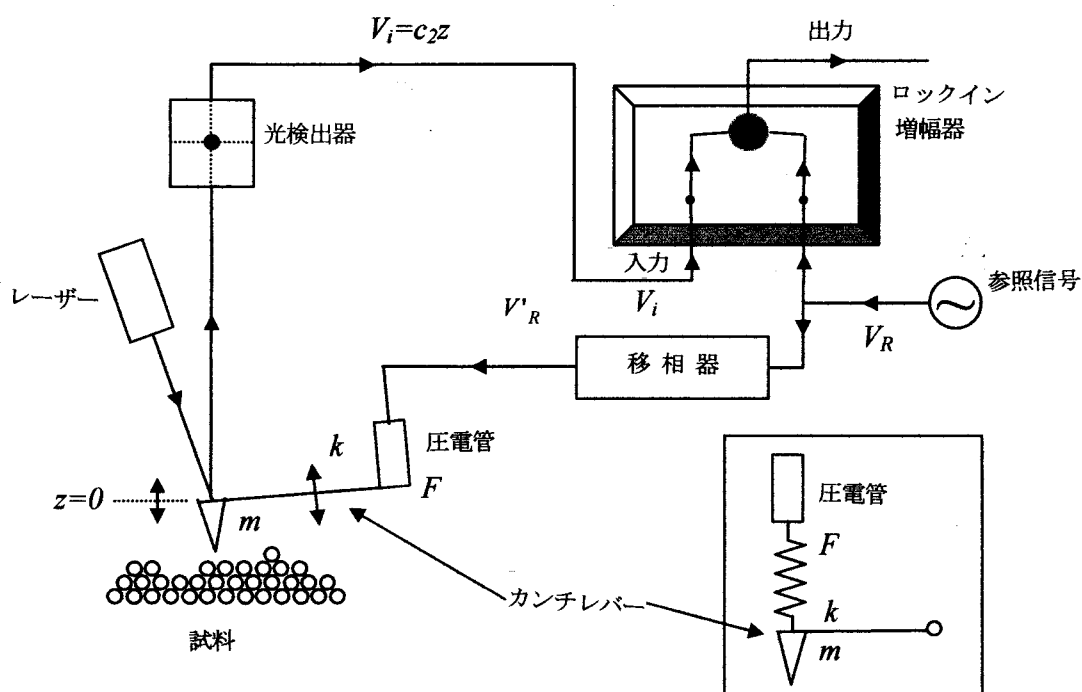


図3.1 走査型プローブ顕微鏡(SPM)の概念図である。右下の挿入図は、圧電管のカンチレバーへの接続を描いた簡略化した力学的な模型を示している。

¹⁾ (原文にない訳者による注) (3.1)式は、ばねの弾性力 $-kz$ 、速度 $v = \frac{dz}{dt}$ に比例する抵抗 $-b \frac{dz}{dt}$ および強制力 F がはたらくときのカンチレバーの運動方程式である。

[Part A]

- (a) $F = F_0 \sin \omega t$ のとき, (3.1)式を満たす $z(t)$ は, $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ と表される。ここで, $A > 0$ で $0 \leq \phi \leq \pi$ である。振幅 A と $\tan \phi$ を F_0, m, ω, ω_0 および b で表し, 共鳴角振動数 $\omega = \omega_0$ での A と位相 ϕ を求めよ。
- (b) 図 3.1 に示されるロックイン増幅器は, 入力信号にロックイン参照信号 $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ を乗じ, 乗じられた信号の dc(直流)成分のみを通過させる。入力信号は $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ で与えられる。ここで, V_{R0}, V_{i0}, ω_i および ϕ_i はすべて正の定数である。出力信号が 0 でなく残るための $\omega (> 0)$ に関する条件を求めよ。さらに, この角振動数において残る dc 出力信号はどのように表されるか。
- (c) ロックイン参照電圧 $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ は, 移相器を通過すると $V'_R = V_{R0} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ に変わる。 V'_R が圧電管に作用すると, カンチレバーに力 $F = c_1 V'_R$ を及ぼす。そのとき, 光検出器はカンチレバーの変位 z を電圧 $V_i = c_2 z$ に変換する。ここで, c_1, c_2 は定数である。 $\omega = \omega_0$ において, dc 出力信号はどのように表されるか。
- (d) カンチレバーの質量がわずかに Δm だけ変化すると, 共鳴角振動数は $\Delta \omega_0$ だけずれる。その結果, 強制力の角振動数 ω が元の共鳴角振動数 ω_0 のままであるとき, 位相 ϕ は $\Delta \phi$ だけずれる。位相測定における通常の最小解像度であるずれ $\Delta \phi = \frac{\pi}{1800}$ を与える質量変化 Δm を求めよ。カンチレバーの物理的なパラメータは, $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$, $k = 1.0 \text{ N/m}$ および $\frac{b}{m} = 1.0 \times 10^3 \text{ 1/s}$ である。ただし, 近似式

$$|x| \ll 1 \text{ のとき, } (1+x)^a \approx 1+ax, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -\frac{1}{x}$$

を用いよ。

[Part B]

ここからは, part A で考えた強制力の他に, 図 3.1 に示されている試料からいくつかの力がカンチレバーに作用する場合を考察しよう。

- (e) 付加的な力 $f(h)$ がカンチレバーと試料表面の間隔 h のみに依存すると仮定すると, 新たな平衡位置 h_0 を見出すことができる²⁾。 $h = h_0$ の近くで, c_3 を定数として $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ と書けることを用いて, 新たな共鳴角振動数 ω'_0 を ω_0, m および c_3 を用いて表せ。
- (f) 試料を水平に動かすことにより, 表面を走査しているとき, 電荷 $Q = 6e$ をもったカンチレバーの先端は, 表面の下ある距離のところに捕えられた(空間的に局在した)電荷 $q = e$ の電子に出会う。電子のまわりを走査している間, 共鳴振動数の最大のずれ $\Delta \omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$ は, ω_0 よりずっと小さい。ずれが最大のとき, カンチレバーから捕えられた電子までの距離 d_0 を, $m, q, Q, \omega_0, \Delta \omega_0$ およびクーロンの法則の比例定数 k_e 。

²⁾ (原文にない訳者による注) 平衡位置 $h = h_0$ とは, 速度に比例する抵抗力と強制力がはたらかないとき, 弾性力と付加的な力が釣り合う位置である。すなわち, $kh_0 - f(h_0) = 0$ が成り立つ。

を用いて表せ。また、 $\Delta\omega_0 = 20 \text{ 1/s}$ のとき、 d_0 を nm ($1\text{nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) の単位で求めよ。

ただし、カンチレバーの物理的なパラメータは、 $m = 1.0 \times 10^{-12}$ および $k = 1.0 \text{ N/m}$ である。また、カンチレバーの先端と表面両方の分極の影響は無視でき、

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2, \quad e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ である。}$$

理論第3問 【解答】

原子プローブ顕微鏡

(a) $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ を方程式 $m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin \omega t$ へ代入して,

$$-m\omega^2 \sin(\omega t - \phi) + b\omega \cos(\omega t - \phi) + m\omega_0^2 \sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{A} \sin \omega t$$

ここで, $\sin(\omega t - \phi)$ と $\cos(\omega t - \phi)$ に加法定理を用いて,

$$\left\{ m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + b\omega \sin \phi - \frac{F_0}{A} \right\} \sin \omega t + \{ -m(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + b\omega \cos \phi \} \cos \omega t = 0$$

$\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の係数は0でなければならないことから,

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}$$

を得る。また, $\omega = \omega_0$ において,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

(b) 乗じられた信号は,

$$V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i) V_{R0} \sin \omega t = \frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} [\cos\{(\omega_i - \omega)t - \phi_i\} - \cos\{(\omega_i + \omega)t - \phi_i\}]$$

となり, dc 成分が残るのは $\omega = \omega_i$ のときのみである。この場合, dc 信号は,

$$\frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} \cos \phi_i$$

と表される。

(c) ロックイン増幅器を通過できるのは, 入力振動の振動数が参照信号と同じ場合だけであるから, 圧電管, カンチレバー, 光ダイオード検出器の振動数はすべて等しい。このとき, 共鳴状態($\omega = \omega_0$)での入力信号の振幅は,

$$V_{i0} = c_2 \frac{F_0}{b\omega_0} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0}$$

となる。入力信号の初期位相($t=0$ での位相)は, カンチレバーで推進力が変位に変換されるときに $\frac{\pi}{2}$ 遅れ, 移相器で $\frac{\pi}{2}$ 進むから, $\phi_i = 0$ となり, ロックイン増幅器の出力信号は,

$$\frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} \cos 0 = \frac{c_1 c_2}{2} \frac{V_{R0}^2}{b\omega_0}$$

(d) $m \rightarrow m + \Delta m$ のとき, 共鳴角振動数 ω_0 は,

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m}\right)} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m}\right)$$

にずれる。こうして、

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2} \omega_0 \frac{\Delta m}{m} \quad \dots \textcircled{2}$$

①式で、 $\omega = \omega_0$ のまま、 $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} + \Delta\phi$ 、 $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega_0$ として、 $(\Delta\omega_0)^2$ の項を落とすと、 ω_0 のわずかな変化による位相変化 $\Delta\phi$ は、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) \approx -\frac{1}{\Delta\phi} \approx \frac{b}{2m\Delta\omega_0} \quad \therefore \Delta\phi \approx -\frac{2m\Delta\omega_0}{b} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。②、③式から $\Delta\omega_0$ を消去して、

$$\Delta m = \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi = \frac{\frac{b}{m} m}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Delta\phi = \frac{10^3 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{\frac{1.0}{10^{-12}}}} \frac{\pi}{1800} \doteq \underline{1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}}$$

を得る。

(e) カンチレバーと試料との間に相互作用が存在するとき、新たな平衡位置 h_0 からの変位を $z = h - h_0$ とおき、 $f(h) = f(h_0) + c_3 z$ を用いると、カンチレバーの運動方程式は、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + m\omega_0^2 z - c_3 z = F_0 \sin \omega t$$

となる。定数項 $f(h_0)$ は、新たな平衡位置では弾性力と打ち消す。

こうして、元の共鳴角振動数 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ は、

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\frac{m\omega_0^2 - c_3}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}}$$

へずれる。よって、共鳴角振動数のずれは、

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 \left(\sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} - 1 \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

と表される。

(f) カンチレバーが電荷の真上にくると、ずれは最大になる。このとき、作用する力は、

$$f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2}$$

であり、設問(e)で用いた定数 c_3 は、

$$c_3 = \left. \frac{df}{dh} \right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3}$$

となる。また、 $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ であるから、④式から、 $\frac{c_3}{m\omega_0^2} \ll 1$ であるから、④式を、

$$\Delta\omega_0 \approx -\frac{c_3}{2m\omega_0}$$

と近似できる。こうして、

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2m\omega_0} \left(-2k_e \frac{qQ}{d_0^3} \right) = k_e \frac{qQ}{m\omega_0 d_0^3}$$

$$\therefore d_0 = \left(k_e \frac{qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} = 4.1 \times 10^{-8} \text{ m} = \underline{\underline{41 \text{ nm}}}$$