

理論第2問

上昇する気球

ヘリウム気体で満たされたゴム製の気球が、高度と共に気圧と温度が低下する空中を上昇している。下記の設問において、(ゴム製の気球本体などの)搭載物の加重があるにもかかわらず、気球は球形であり、搭載物の体積は無視できるものとする。気球内のヘリウム気体の温度はいつでも周囲の大気温度に等しく、すべての気体は理想気体として扱われるものとする。気体定数は、 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、ヘリウムと空気の1モルの質量を、それぞれ $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 、 $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ とし、重力加速の大きさを $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。

[Part A]

- (a) 周囲の大気圧を P 、(絶対)温度を T とする。気球内の圧力は、気球の表面張力により外気圧より高い。気球は n モルのヘリウム気体を含み、その圧力が $P + \Delta P$ であった。気球に作用する浮力 F_B を P と ΔP の関数として求めよ。
- (b) 韓国のある夏の日、海面からの高さ z の大気温度 T が、 $0 < z < 15 \text{ km}$ の範囲で

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \quad \dots(2.1)$$

と表されることがわかった。ここで、 $z_0 = 49 \text{ km}$ 、 $T_0 = 303 \text{ K}$ である。海面と同じ高さでの大気圧と密度はそれぞれ、 $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、 $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ であった。この高さの範囲で、大気圧は、

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^\eta \quad \dots(2.2)$$

となる。 η を z_0, ρ_0, P_0 および g で表し、その数値を有効数字2桁で求めよ。ただし、重力加速度は高さによらず一定とする。

[Part B]

伸びがないときの半径が r_0 であるゴム製の気球が半径 $r (\geq r_0)$ の球に膨張している場合、気球表面は伸びによる弾性エネルギーをもっている。単純化した理論において、温度 T における弾性エネルギー U は、

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa R T \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad \dots(2.3)$$

と表される。ここで、 $\lambda \equiv \frac{r}{r_0} (\geq 1)$ は大きさの膨張係数であり、 κ は mol/m^2 の単位で表される定数である。

- (c) (2.3)式で与えられているパラメータを用いて ΔP を表し、 ΔP を $\lambda = \frac{r}{r_0}$ の関数として

そのグラフの概略を描け。

- (d) 定数 κ は気球を膨張させるのに必要な気体の量から決められる。 $T_0 = 303 \text{ K}$, $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ において、伸びていない気球($\lambda = 1$)は、 $n_0 = 12.5$ モルのヘリウムを含む。同じ温度 T_0 と圧力 P_0 において、 $n = 3.6n_0 = 45$ モルの気体は気球を $\lambda = 1.5$ まで膨張させる。 $a = \frac{\kappa}{\kappa_0}$ として定義される気球パラメータ a を、 n, n_0 および λ を用いて表せ。ここで、 $\kappa_0 = \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$ である。また、 a を有効数字 2 桁で求めよ。

[Part C]

海面と同じ高さで設問 (d) で述べたように準備された気球 ($T_0 = 303 \text{ K}$, $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ で $n = 3.6n_0 = 45$ モルのヘリウム気体を $\lambda = 1.5$ まで膨張させてある)がある。気球本体と他の搭載物を含む全質量は $M_T = 1.12 \text{ kg}$ である。いま、気球を海面と同じ高さから上昇させる。

- (e) 気球は、浮力と全加重とがつり合い、高度 z_f でついに停止するとする。 z_f およびその高さでの膨張係数 λ_f を求めよ。答は有効数字 2 桁で表せ。ただし、気球が上昇している間、流されたり気体が漏出することはないとする。

[Part A]

(a) 圧力 $P + \Delta P$ 、温度 T で n モルのヘリウム気体の体積を V とすると、理想気体の状態方程式は、

$$(P + \Delta P)V = nRT \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、求める浮力 F_B は、圧力 P 、体積 V で温度 T の大気にはたらく重力に等しい。

圧力 P 、体積 V 、温度 T で n' モルの大気の状態方程式は、

$$PV = n'RT \quad \cdots \textcircled{2}$$

①、②式より、 $n' = n \frac{P}{P + \Delta P}$ となることから、

$$F_B = n'M_A g = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}$$

(b) 圧力 P 、体積 V 、温度 T で n モルの気体の質量を m とし、この気体 1 モルの質量を M

とすると、 $n = \frac{m}{M}$ より、状態方程式は、

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

よって、圧力 P 、温度 T の大気の密度 ρ は、海面と同じ高さでの大気の圧力 P_0 、温度 T_0 、密度 ρ_0 を用いて、

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \propto \frac{P}{T} \quad \therefore \quad \rho = \rho_0 \frac{T_0 P}{P_0 T}$$

と表される。

高度が Δz だけ変化したときの大気圧の変化を ΔP とする。この高度での大気の密度を ρ とすると、この間の大気にはたらく力のつり合いより(図 a)、

$$\begin{aligned} \Delta P &= -\rho g \Delta z \\ \therefore \frac{dP}{dz} &= -\rho g = -\rho_0 \frac{T_0 P}{P_0 T} g \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を得る。ここで、③式の両辺に(2.1)、(2.2)式を代入して、

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = \frac{1.16 \times 9.8 \times 4.9 \times 10^4}{1.01 \times 10^5} \doteq 5.5$$

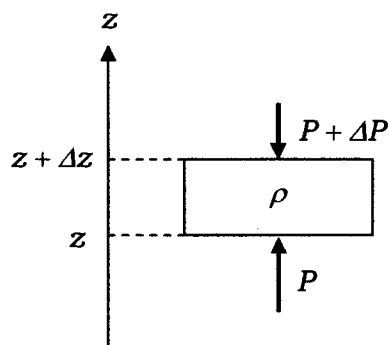


図 a

[Part B]

(c) 気球内外の圧力差が ΔP のとき、気球の半径が r から $r + \Delta r$ まで増加したとする。このとき、気球内の気体のする仕事の中で、圧力 P のする仕事は周囲の大気になされるから、

残りの ΔP のする仕事 $\Delta W = 4\pi r^2 \Delta P \cdot \Delta r$ が、弾性エネルギーの増加 $\Delta U = \frac{dU}{dr} \Delta r$

$$= 4\pi\kappa RT \left(4r - 4\frac{r_0^6}{r^5} \right) \Delta r \text{ に等しい。よって,}$$

$$\Delta P = 4\kappa RT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7} \right) = \frac{4\kappa RT}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$

よって, $\frac{d}{d\lambda}(\Delta P) = \frac{4\kappa RT}{r_0} \frac{1}{\lambda^8} (7 - \lambda^6)$ より, 増減表は,

λ	1	...	$7^{1/6} \doteq 1.38$	...
$\frac{d}{d\lambda} \Delta P$		+	0	—
ΔP	0	増加	極大	減少

となる。大きな λ に対し, $\frac{\Delta P}{4\kappa RT/r_0}$ は $\sim \frac{1}{\lambda}$ のように減少する。こうして, $\frac{\Delta P}{4\kappa RT/r_0}$ の

グラフとして図bを得る。

(d) 伸びていないときの気球の体積を V_0 とすると, 気球内の気体の状態方程式は,

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0 \quad \dots \textcircled{4}$$

温度 T_0 の下で, 内部に n モルの気体を含む気球の体積を $V = \lambda^3 V_0$, 圧力を P_{in} とする

と, 状態方程式は,

$$P_{\text{in}} V = n R T_0 \quad \dots \textcircled{5}$$

④, ⑤式より,

$$\frac{P_{\text{in}}}{P_0} = \frac{n}{n_0 \lambda^3} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。一方, 設問(c)の結果より,

$$P_{\text{in}} = P_0 + \Delta P = P_0 + \frac{4\kappa R T_0}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) = \left\{ 1 + a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) \right\} P_0 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦式より,

$$a = \frac{n/(n_0 \lambda^3) - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}} = \frac{(n - n_0 \lambda^3) \lambda^4}{n_0 (\lambda^6 - 1)}$$

を得る。ここで, $\frac{n}{n_0} = 3.6$, $\lambda = 1.5$ を代入して, $a \doteq \underline{1.1 \times 10^{-1}}$

(e) 高度 $z = z_f$ ($\lambda = \lambda_f$)で大気圧を P , 温度を T とする。このときの気球内気体の圧力を $P + \Delta P$ として, 気球にはたらく力のつり合いより,

$$n M_A g \frac{P}{P + \Delta P} = M_T g \quad \therefore \frac{P}{P + \Delta P} = \frac{M_T}{n M_A} \quad \dots \textcircled{8}$$

他方、体積 $V = \lambda_f^3 V_0$ の気球内の気体の状態方程式は、

$$(P + \Delta P) \lambda_f^3 V_0 = nRT \quad \dots \textcircled{9}$$

④, ⑨式より, $(P + \Delta P) \lambda_f^3 = P_0 \frac{n}{n_0} \frac{T}{T_0}$ となるから, これを⑧式へ代入して,

$$\frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A} \quad \dots \textcircled{10}$$

また, 設問(c)の結果を⑨式へ代入して,

$$\begin{aligned} P \lambda_f^3 + \frac{4\kappa RT}{r_0} \lambda_f^2 (1 - \lambda_f^{-6}) &= P_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0} \\ \therefore \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \lambda_f^3 &= \frac{n}{n_0} - a \lambda_f^2 (1 - \lambda_f^{-6}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{11}$$

⑩, ⑪式より,

$$\lambda_f^2 (1 - \lambda_f^{-6}) = \frac{1}{an_0} \left(n - \frac{M_T}{M_A} \right) = 4.54$$

ここで, $\lambda_f^2 \approx 4.54$ とすると, $\lambda_f^{-6} \approx 0.01$ となるから, $\lambda_f^2 \approx 4.54$ であり,

$$\lambda_f \cong 2.13 \doteq \underline{2.1}$$

次に, ⑩式に(2.1), (2.2)式を代入して,

$$\frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \lambda_f^3 = \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right)^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A} = 3.10 \quad \dots \textcircled{12}$$

⑫式に, $\lambda_f = 2.13$, $z_0 = 49 \text{ km}$, $\eta - 1 = 4.5$ を代入して,

$$z_f = z_0 \left\{ 1 - \left(\frac{3.10}{\lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} \right\} \doteq \underline{11 \text{ km}}$$