

理論第1問

‘ピンポン’抵抗器

図1.1(a)に示すように、半径 R の2枚の円形極板が間隔 d (d は R に比べて十分小さい、 $d \ll R$)だけ離して平行に置かれたコンデンサーがあり、上側極板は一定電位 V をもつ電源端子に接続され、下側極板は接地されている。また図1.1(b)に示すように、質量 m で半径 r ($\ll R, d$)、厚さ t ($\ll r$)の薄くて小さな円盤が下側極板の中心に置かれている。

極板間は真空中で、その誘電率を ϵ_0 とする。また、極板と円盤は完全導体であり、端の静電的効果はすべて無視できる。すべての回路のインダクタンスと相対論的効果は考える必要はない。さらに、電荷の鏡像効果も無視できる。

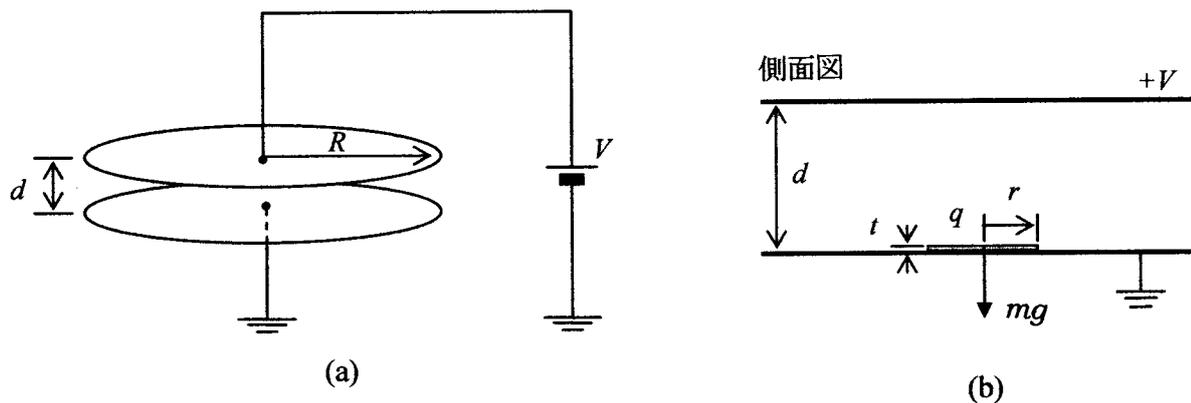


図1.1 (a)は一定電圧電源につながれた平行板コンデンサーの概念図であり、(b)は内部に小さな円盤が挿入された平行板コンデンサー側面図である。

- (a) 図1.1(a)に示すように、極板間に円盤を挿入する前、 d だけ離れた極板間にはたらく静電気力 F_p を計算せよ。
- (b) 円盤が下側極板上に置かれたとき、図1.1(b)の円盤上の電荷 q は、電圧 V との間に $q = \chi V$ の関係がある。 χ を r, d および ϵ_0 を用いて表せ。
- (c) 平行極板は、重力加速度 g の様な重力場に垂直に置かれている。はじめ静止していた円盤を持ち上げるには、極板間にしきい電圧 V_{th} より大きな電圧をかける必要がある。 V_{th} を m, g, d および χ を用いて求めよ。
- (d) $V > V_{th}$ のとき、円盤は極板間を上下運動する。ただし、円盤は横揺れすることなしに垂直にのみ動くとする。円盤と極板は非弾性衝突し、そのはね返り係数を $\eta(=v_{after}/v_{before})$ とする。ここで、 v_{before} と v_{after} は、それぞれ衝突前後での円盤の速さ

である。極板は一定の位置に固定されている。下側極板に衝突直後の円盤の速さは¹⁾、次のように表される V に依存した”定常状態の速さ” v_s に近づく。

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta} \quad (1.1)$$

係数 α と β を m, g, χ, d および η を用いて表せ。ただし、各衝突において完全な電荷交換が瞬時に起こるように、円盤の全表面は等しく同時に極板に接するとする。

(e) 定常状態に達した後、コンデンサー極板を通して流れる時間平均電流 I は、

$|q|V \gg mgd$ のとき、 $I = \gamma V^2$ と近似される。係数 γ を m, χ, d および η を用いて表せ。

(f) コンデンサーにかかる電圧 V を非常にゆっくりと減少させると、ついには電荷が移動しなくなるような臨界電圧 V_c が存在する。 V_c および対応する電流 I_c を、 m, g, χ, d および η を用いて表せ。また、 V_c を(c)で議論したしきい値 V_{th} と比較することにより、 V が0から $3V_{th}$ まで変化するときの $I-V$ 特性曲線の概略を描け。

¹⁾ (原文にはない訳者による注) 小円盤が極板間を何回も往復運動した後

理論第1問 【解答】

‘ヒンボン’抵抗器

(a) コンデンサーの電気容量は、 $C = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d}$ であるから、外部電圧 V により極板に蓄えられる電荷 Q は、

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} V$$

一方の極板に作用する電場 E' は、他方の極板のつくる電場であり、極板間の電場 $E = \frac{V}{d}$ は両極板による電場の合成電場であるから、極板に作用する静電気力(引力)の大きさ F_p は、

$$F_p = QE' = \frac{1}{2}QE = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}$$

[別解]

極板の電荷 Q は、ガウスの法則：

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

より、

$$Q = \epsilon_0 E \cdot \pi R^2 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} V$$

コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー U は¹⁾、

$$U = \int_0^V Q(V') dV' = \int_0^V \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} V' dV' = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d}$$

極板間に作用する静電気力(引力)の大きさ F_p は、

$$F_p = -\frac{\partial U}{\partial d} = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}$$

(b) 極板間の電場は一様であるから、極板上に分布する電荷も一様である。また、下側極板の電荷は負であるから、小円盤上の電荷 q は、

$$q = -\left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right)Q = -\frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d} V \quad \therefore \chi = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$$

[別解]

ガウスの法則より、

¹⁾ $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} V \cdot V = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d}$ としてもよい。

$$q = -\varepsilon_0 E \cdot \pi r^2 = -\varepsilon_0 \frac{V}{d} \cdot \pi r^2 \quad \therefore \quad \chi = -\frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}$$

(c) 鉛直上向きを正として、小円盤には、静電気力 F_e と重力 $F_g = -mg$ の合力 $F_{\text{net}} = F_e + F_g$

が作用する。 F_e は、極板に作用する力 F_p で、 $R \rightarrow r$ として、 $F_e = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2 V^2}{2d^2} = \frac{|\chi|}{2d} V^2$ と書けるから、円盤が上昇する条件 $F_{\text{net}} > 0$ は、

$$\frac{|\chi|}{2d} V^2 - mg > 0 \quad \therefore \quad V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{|\chi|}}$$

(d) 極板間を一往復する間で円盤が得る静電的エネルギーは $\Delta U = 2|q|V$ であり、非弾性衝突で失う運動エネルギーは

$$\Delta K_{\text{loss}} = K_{\text{before}} - K_{\text{after}} = (1 - \eta^2) K_{\text{before}} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_{\text{after}}$$

である。ちょうど下側極板上で、定常状態での円盤の運動エネルギーは $K_s = \frac{1}{2} m v_s^2$ であり、

上側極板に衝突する前のエネルギーは、 $K_s + |q|V - mgd$ であるから、円盤が一往復する間に失うエネルギーは、

$$\Delta K_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2)(K_s + |q|V - mgd)$$

定常状態では、一往復の間に円盤が得るエネルギー ΔU と失うエネルギー ΔK_{tot} は等しいから、

$$2|q|V = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2)(K_s + |q|V - mgd)$$

$$\therefore K_s = \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) |q|V + \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) mgd = \frac{1}{2} m v_s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

これより、

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) \left(\frac{2|\chi|V^2}{m} \right) + \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) \cdot 2gd}$$

こうして、

$$\alpha = \frac{2\eta^2 |\chi|}{(1 - \eta^2)m}, \quad \beta = \frac{2\eta^2}{1 + \eta^2} gd$$

[別解]

小円盤が下側極板と n 回目の衝突をした直後の速さを v_n とすると、そのときの運動エネルギーは、 $K_n = \frac{1}{2}mv_n^2$ であり、円盤が上側極板に達するまでに得る運動エネルギーは、

$$\Delta U_{\text{up}} = |q|V - mgd$$

であるから、円盤が上側極板に衝突する直前の運動エネルギーは、

$$K_{n-\text{up}} = \frac{1}{2}mv_{\text{up}}^2 = K_n + \Delta U_{\text{up}}$$

となる。

円盤が上側極板に衝突した後の運動エネルギーは $K'_{n-\text{up}} = \eta^2 K_{n-\text{up}}$ であり、下側極板に達するまでに得るエネルギーは $\Delta U_{\text{down}} = |q|V + mgd$ であるから、円盤が下側極板に衝突する直前の運動エネルギーは、 $K_{n-\text{down}} = K'_{n-\text{up}} + \Delta U_{\text{down}}$ と書ける。これらより、円盤が下側極板に $(n+1)$ 回目の衝突をした直後の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \eta^2 K_{n-\text{down}} \\ &= \eta^2 (K'_{n-\text{up}} + \Delta U_{\text{down}}) \\ &= \eta^2 (\eta^2 (K_n + \Delta U_{\text{up}}) + \Delta U_{\text{down}}) \\ &= \eta^2 (\eta^2 (K_n + |q|V - mgd) + |q|V + mgd) \\ &= \eta^4 K_n + \eta^2 (1 + \eta^2) |q|V + \eta^2 (1 - \eta^2) mgd \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $K_n \rightarrow K_s$ 、 $K_{n+1} \rightarrow K_s$ となるとみなして、

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{1 - \eta^4} \{ \eta^2 (1 + \eta^2) |q|V + \eta^2 (1 - \eta^2) mgd \} \\ &= \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) |q|V + \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) mgd \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

これより、

$$\alpha = \frac{2\eta^2 |q|}{(1 - \eta^2)m}, \quad \beta = \frac{2\eta^2}{1 + \eta^2} gd$$

(e) 円盤が極板間を一往復する間に電荷 $2|q|$ が上側極板から下側極板へ運ばれる。この間の時間 Δt は、円盤が上向きに動いている時間を t_+ 、下向きに動いている時間を t_- として、

$\Delta t = t_+ + t_-$ である。ここで、 v_{0+} (v_{0-})を円盤が下(上)側極板と衝突した直後の速さ、 a_+ (a_-)を円盤の上(下)向きの加速度とすると、 t_+ と t_- は、

$$v_{0+}t_+ + \frac{1}{2}a_+t_+^2 = d$$

$$v_{0-}t_- + \frac{1}{2}a_-t_-^2 = d$$

を満たす。円盤の運動方程式は、

$$ma_{\pm} = |q|E \mp mg = \frac{|q|V}{d} \mp mg$$

であるが、条件 $|q|V \gg mgd$ のとき、 a_{\pm} は、

$$a_0 = a_+ = a_- \approx \frac{|q|V}{md} \quad \dots \textcircled{3}$$

と近似され、円盤の上下運動は対称的となる。こうして、 $t_0 = t_+ = t_-$ 、 $v_s = v_{0+} = v_{0-}$ となる。さらに、円盤が上側および下側極板と衝突直後の速さは等しく、

$$v_s = \eta(v_s + a_0 t_0) \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ([補足]参照)。これより、

$$\Delta t = 2t_0 = 2 \frac{1-\eta}{\eta} \frac{v_s}{a_0} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。また、①式より、 $|q|V \gg mgd$ のとき、

$$K_s = \frac{1}{2} m v_s^2 \approx \left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2} \right) |q|V \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。

③、⑥式を⑤式へ代入して、

$$\Delta t = 2 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \sqrt{\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}} \sqrt{\frac{md^2}{|q|V}} = 2 \sqrt{\frac{2(1-\eta)m}{(1+\eta)|\chi|}} \cdot \frac{d}{V}$$

したがって、

$$I = \frac{2|q|}{\Delta t} = |\chi| \sqrt{\frac{(1+\eta)|\chi|}{2(1-\eta)m}} \cdot \frac{V^2}{d} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\therefore \gamma = \frac{|\chi|}{d} \sqrt{\frac{(1+\eta)|\chi|}{2(1-\eta)m}}$$

[補足]

③式を用いて④式を導いてみよう。それには、定常状態において、 $v_{0+} = v_s$ であることから、 $v_{1-} = v_s$ を導けばよい。円盤が上側極板に衝突する直前の速さ v_{1+} は、等加速度運動の式より、

$$v_{1+} = \sqrt{v_s^2 + 2a_0d}$$

ここで、⑥式に③式を用いると、

$$v_s^2 = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \frac{2|q|V}{m} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot 2a_0d \quad \therefore 2a_0d = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)v_s^2$$

これより、

$$v_{1+} = \frac{v_s}{\eta}$$

となり、 $v_{1-} = v_s$ を得る。

[別解]

円盤の平均の速さを \bar{v} とすると、 $\Delta t = \frac{2d}{\bar{v}}$ であるから、電流 I は、

$$I = \frac{2|q|}{\Delta t} = \frac{|q|\bar{v}}{d}$$

と書ける。いま、等加速度運動では、

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_{0+} + v_{1+}) = \frac{1}{2}\left(v_s + \frac{v_s}{\eta}\right)$$

が成り立つから、

$$I = \frac{|q|}{2d} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)v_s$$

となる。ここで、⑥の v_s の表式を代入して、⑦式を得る。

(f) 電荷が移動しなくなるのは、円盤が上側極板に達しなくなる場合である。よって、 $V = V_c$ のとき、円盤が上側極板に衝突する直前の速さは $0(v_{1+} = v_{0-} = 0)$ になる。この条件は、エネルギーでは、

$$K_s + |q|V_c - mgd = 0$$

と表される。よって②式より、

$$\left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\right)|q|V_c + \left(\frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right)mgd + |q|V_c - mgd = 0$$

となる。これから、

$$(1+\eta^2)|q|V_c - (1-\eta^2)mgd = 0$$

ここで、 $q = \chi V_c$ を用いて、

$$V_c = \sqrt{\frac{(1-\eta^2)mgd}{(1+\eta^2)|\chi|}}$$

を得る。

さらに、 $I-V$ 特性曲線を描くときに用いる量 z_c を求めておこう。 $V_c = z_c V_{th}$ とおくと、

$$z_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}$$

となる。

次に、 $V=V_c$ のときの電流 I_c を求めよう。

このとき、円盤が上昇するときの加速度 a_+ と下降するときの加速度 a_- は、それぞれ、

$$a_+ = \frac{|q|V_c}{md} - g = \left(\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} - 1 \right) g = -\frac{2\eta^2}{1+\eta^2} g$$

$$a_- = \frac{|q|V_c}{md} + g = \left(\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} + 1 \right) g = \frac{2}{1+\eta^2} g$$

となり、 $v_{0-} = 0$ より、

$$\frac{1}{2} a_- t_-^2 = d \quad \therefore \quad t_- = \sqrt{\frac{2d}{a_-}} = \sqrt{(1+\eta^2) \frac{d}{g}}$$

また、 $0^2 - v_{0+}^2 = 2a_+ d$ よって、 $v_{0+} = \sqrt{2|a_+|d}$ となるから、 $v_{1+} = 0$ より、

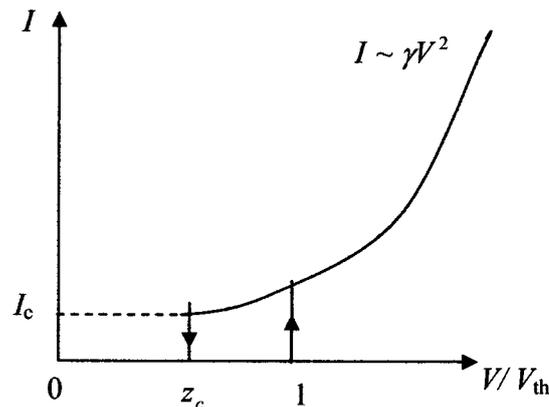
$$v_{0+} + a_+ t_+ = 0 \quad \therefore \quad t_+ = -\frac{v_{0+}}{a_+} = \sqrt{\frac{2d}{|a_+|}} = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\eta^2} \frac{d}{g}} = \frac{t_-}{\eta}$$

したがって、

$$\Delta t = t_- + t_+ = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{(1+\eta^2) \frac{d}{g}}$$

$$\therefore \quad I_c = \frac{2|q|}{\Delta t} = \frac{2|\chi|V_c}{\Delta t} = \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta)(1+\eta^2)} g\sqrt{m|\chi|}$$

以上より、下図を得る。



【詳細な計算】

任意の V に対して $I-V$ 特性を計算しておこう。
表記を簡単にするため、以下の変数を導入する。

$$(i) \quad y = \frac{V}{V_{th}}, \quad \text{ここで, } V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{|\chi|}}$$

$$(ii) \quad z_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}$$

$$(iii) \quad w_0 = 2\eta\sqrt{\frac{gd}{1-\eta^2}}, \quad w_1 = 2\sqrt{\frac{d}{(1-\eta^2)g}}$$

これらより,

$$a_+ = \frac{|q|V}{md} - g = g(2y^2 - 1)$$

$$a_- = \frac{|q|V}{md} + g = g(2y^2 + 1)$$

$$v_{0+} = v_s = w_0\sqrt{y^2 + z_c^2}$$

$$v_{0-} = \eta(v_{0+} + a_+t_+) = w_0\sqrt{y^2 - z_c^2}$$

$$t_+ = w_1 \frac{\sqrt{y^2 - z_c^2} - \eta\sqrt{y^2 + z_c^2}}{2y^2 - 1}$$

$$t_- = w_1 \frac{\sqrt{y^2 + z_c^2} - \eta\sqrt{y^2 - z_c^2}}{2y^2 + 1}$$

を得る。こうして、電流の表式は,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2|q|}{t_+ + t_-} = 2|\chi|V_{th} \frac{y}{t_+ + t_-} \\ &= \frac{\sqrt{8mgd|\chi|}}{w_1} \cdot y \left(\frac{\sqrt{y^2 - z_c^2} - \eta\sqrt{y^2 + z_c^2}}{2y^2 - 1} + \frac{\sqrt{y^2 + z_c^2} - \eta\sqrt{y^2 - z_c^2}}{2y^2 + 1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

となる。これより下図を得る。

