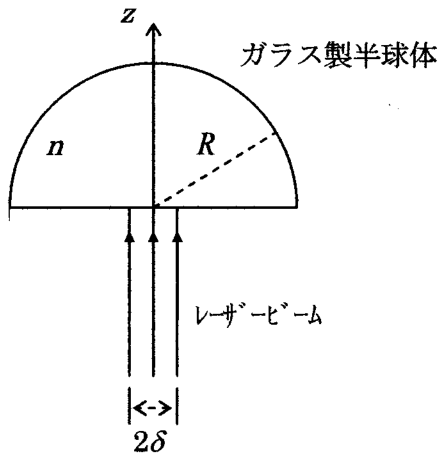
Part B

光線による浮揚

半径R，質量mで屈折率nのガラス製の半球体がある。半球体の外側の媒質の屈折率は１である。図３－１のように，平行で単色なレーザー光のビームが半球体の平面の中央部分に一様に入射している。重力加速度$\vec{g}$は鉛直下方に向いている。レーザービームの円形断面の半径δはRより十分に小さい。ガラス製半球体とレーザービームは，z軸に関して軸対称である。

図３－１



ガラス製の半球体はレーザー光を吸収せず，半球体の表面は，光線が入射あるいは透過する際反射が無視できるように薄い透明物質でコーティングされている。無反射表面層を通過するレーザー光の光路もまた無視できる。

(b) 大きさ$\left(\dfrac{\delta}{R}\right)^3$の項およびそれより高次の項を無視して，ガラス製半球体をつり合わせるのに必要なレーザーのパワーPを求めよ。

ヒント：θが１に比べて十分に小さいとき，近似式$\cos\theta \approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}$を用いよ。

(原文にはない訳者によるヒント)

パワーとは，１つの断面を単位時間に通過するエネルギーのことである。

Part B

光線による浮揚

(b) 図３－aにおいて，球面上の点Aにおけるレーザー光の入射角をθ_i，屈折角をθ_tとすると，屈折の法則(スネルの法則)は，

$$n\sin\theta_i = \sin\theta_t \qquad \cdots ⑪$$

いま，$R\sin\theta_i = r \leq \delta$ より，　θ_i，θ_t は$\dfrac{\delta}{R}$程度の量であるから，$\theta_i{}^3, \theta_t{}^3\left(\left(\dfrac{\delta}{R}\right)^3\right)$以上の項を無視して，⑪式は

$$n\theta_i \approx \theta_t$$

となる。また，

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx (n-1)\theta_i$$

である。

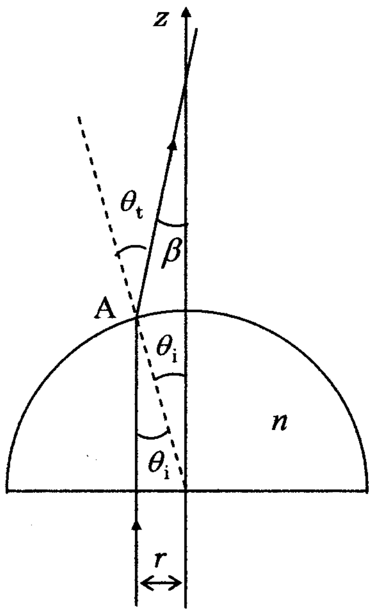


図３－a

単位面積を単位時間あたりに通過するレーザー光のエネルギーを$p = \dfrac{P}{\pi\delta^2}$とする。$z$軸に垂直な半径$r$と$r + \Delta r$の円で囲まれた円環を単位時間に通過するエネルギー$\Delta P$は，$r = R\sin\theta_i \approx R\theta_i$，$\Delta r \approx R\Delta\theta_i$を用いて，

$$\Delta P \approx p\cdot 2\pi r\Delta r \approx \frac{P}{\pi\delta^2}\cdot 2\pi R^2\cdot\theta_i\Delta\theta_i = \frac{2PR^2}{\delta^2}\theta_i\Delta\theta_i$$

となる。光のエネルギーεと運動量の大きさqの間には，$\varepsilon = cq$の関係があり，半球体がz軸方向に受ける力は，単位時間あたりの光の運動量変化のz成分の大きさに等しいから，上の円環を通過するレーザー光から半球体が受ける力はz成分のみをもち，

$$\Delta F_z = \frac{\Delta P}{c}(1-\cos\beta) \approx \frac{2PR^2}{c\delta^2}\cdot\frac{\beta^2}{2}\theta_i\Delta\theta_i \approx \frac{PR^2(n-1)^2}{c\delta^2}\theta_i{}^3\Delta\theta_i$$

である。

これより，半球体がパワーPのレーザー光から受ける力は，

$$F_z = \sum\Delta F_z = \frac{PR^2(n-1)^2}{c\delta^2}\int_0^{\theta_{im}}\theta_i{}^3 d\theta_i = \frac{PR^2(n-1)^2}{4c\delta^2}\theta_{im}{}^4$$

となる。ここで，$\theta_{im} \approx \dfrac{\delta}{R}$であることを用いて，半球体の力のつり合い$F_z = mg$は，

$$\frac{PR^2(n-1)^2}{4c\delta^2}\cdot\frac{\delta^4}{R^4} = \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\cdot\frac{P}{c} = mg$$

これより，

$$\underline{P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}}$$

を得る。