

理論第3問

Part A

ニュートリノの質量と中性子崩壊

相互作用していない質量 m_n の中性子は，実験室系で静止したまま，相互作用しない3つの粒子(陽子，電子と反ニュートリノ)に崩壊する。陽子の静止質量を m_p とし，反ニュートリノの静止質量 m_ν は，電子の静止質量 m_e より十分に小さいが0ではないとする。真空中の光速を c とし，各質量の測定値は次のとおりである。

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

下記において，すべてのエネルギーと速さは実験室系に対するものであり，崩壊により放出される電子の全エネルギーを E とする。

- (a) エネルギー E の最大値 $E_{\max}$ と， $E = E_{\max}$ のときの反ニュートリノの速さ v_m を，粒子の静止質量と光速を用いて表せ。また， $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ として， $E_{\max}$ と比 $\frac{v_m}{c}$ を有効数字3桁まで求めよ。

(原文にはない訳者によるヒント)

$$\text{静止質量 } m \text{ をもつ粒子の相対論的エネルギー } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ と運動量 } p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(v は粒子の速さ)の間には，

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

の関係(「理論物理への道標下」(河合出版)p.238～参照)がある。この関係よりエネルギー保存則と運動量保存則を用いよ。

理論第3問 【解答】

Part A

ニュートリノの質量と中性子崩壊

(a) しばしば使われる光速 c の煩わしさを省くために、電子、陽子と反ニュートリノのエネルギーと運動量を、それぞれ、

$$(c^2 E_e, c\vec{q}_e), (c^2 E_p, c\vec{q}_p), (c^2 E_\nu, c\vec{q}_\nu)$$

と表す。こうすると、 $E_e, E_p, E_\nu, \vec{q}_e, \vec{q}_p, \vec{q}_\nu$ はすべて質量の単位をもつ。また、ベクトル $\vec{q}_\alpha$ の大きさを q_α ($\alpha = e, p$ または, ν) と書くと、

$$E_e^2 = m_e^2 + q_e^2, \quad E_p^2 = m_p^2 + q_p^2, \quad E_\nu^2 = m_\nu^2 + q_\nu^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の関係式が成り立つ。このとき、中性子崩壊におけるエネルギーと運動量の保存則は、

$$E_p + E_\nu = m_n - E_e$$

$$\vec{q}_p + \vec{q}_\nu = -\vec{q}_e$$

と表される。

上の2式の両辺を2乗すると、

$$E_p^2 + E_\nu^2 + 2E_p E_\nu = m_n^2 + E_e^2 - 2m_n E_e \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$q_p^2 + q_\nu^2 + 2\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。①式を用いて、②－③より、

$$m_p^2 + m_\nu^2 + 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu) = m_n^2 + m_e^2 - 2m_n E_e$$

よって、

$$2m_n E_e = m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu)$$

を得る。

いま、ベクトル $\vec{q}_p$ と $\vec{q}_\nu$ のなす角を θ として、

$$\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_p q_\nu \cos \theta \leq q_p q_\nu$$

となるから、ある運動量の大きさ q_p, q_ν に対して、すなわち、あるエネルギーの値 E_p, E_ν に対して、

$$2m_n E_e \leq m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - q_p q_\nu) \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。これから、陽子と反ニュートリノが同じ方向へ運動する($\vec{q}_p$ と $\vec{q}_\nu$ のなす角

は $\theta=0$)とき、電子のエネルギー $E=c^2 E_e$ が最大になることがわかる。

そこで次に、どのような $q_p, q_\nu(E_p, E_\nu)$ に対して E_e が最大になるかを考える。

いま、中性子が静止する実験室系で陽子と反ニュートリノの速さをそれぞれ v_p, v_ν と

し、 $\beta_p = \frac{v_p}{c}, \beta_\nu = \frac{v_\nu}{c}$ とおく。ここで、陽子に対して E_p と q_p を顕わに表せば、

$$E_p = \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta_p^2}}, \quad q_p = \beta_p \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta_p^2}} \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、反ニュートリノに対しても同様な式が書けるから、

$$E_p E_\nu - q_p q_\nu = m_p m_\nu \cdot \frac{1 - \beta_p \beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}}$$

と表される。 $(1-\beta_p \beta_\nu)^2 - (1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2) = (\beta_p - \beta_\nu)^2 \geq 0$ より、

$$\frac{1 - \beta_p \beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}} \geq 1$$

であり、等号は $\beta_p = \beta_\nu$ のとき成立する。これより、陽子と中性子の速さが等しいとき、

電子のエネルギー E の最大値 $E_{\max}$ は、 $M = m_p + m_\nu$ として、

$$\begin{aligned} E_{\max} &= c^2 (E_e)_{\max} = \frac{c^2}{2m_n} (m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2m_p m_\nu) \\ &= \frac{c^2}{2m_n} \{m_n^2 + m_e^2 - M^2\} \quad \dots \textcircled{6} \\ &\approx \underline{\underline{1.29 \text{ MeV}}} \end{aligned}$$

と求められる。ここで、題意より、 $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ であるから、有効数字3桁の数値計

算では、 $m_\nu \approx 0 \text{ MeV}/c^2$ となることに注意しよう。

⑤式より、 $\beta_p = \frac{q_p}{E_p}$ であり、同様に、 $\beta_\nu = \frac{q_\nu}{E_\nu}$ となる。電子のエネルギーが最大にな

るとき、 $v_\nu \rightarrow v_m$ として、陽子と反ニュートリノは、同じ向きに運動することから、

$$\frac{v_m}{c} = (\beta_\nu)_{E_{\max}} = (\beta_p)_{E_{\max}} = \left(\frac{q_p + q_\nu}{E_p + E_\nu} \right)_{E_{\max}} = \left(\frac{q_e}{m_n - E_e} \right)_{E_{\max}} = \frac{\sqrt{(E_e)_{\max}^2 - m_e^2}}{m_n - (E_e)_{\max}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M^2)^2 - 4m_n^2 m_e^2}}{2m_n^2 - (m_n^2 + m_e^2 - M^2)} \\
&= \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2} \\
&\approx \underline{\underline{1.27 \times 10^{-3}}}
\end{aligned}$$

(別解)

(a) 陽子と反ニュートリノが全エネルギー $c^2 E_c$ ，全運動量 $c\vec{q}_c$ ，静止質量 M_c をもつ系と

考えると，もう少しエレガントな解答が可能である。

$$E_c = E_p + E_\nu, \quad \vec{q}_c = \vec{q}_p + \vec{q}_\nu, \quad E_c^2 = M_c^2 + q_c^2$$

であり，エネルギー保存則と運動量保存則は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
E_c + E_e &= m_n \\
\vec{q}_c &= -\vec{q}_e
\end{aligned} \tag{7}$$

である。これより，

$$E_c^2 - M_c^2 = q_c^2 = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2$$

よって，

$$E_c^2 - E_e^2 = M_c^2 - m_e^2 \tag{8}$$

となる。⑧÷⑦から，

$$E_c - E_e = \frac{M_c^2 - m_e^2}{m_n} \tag{9}$$

を得，⑦，⑨式から，

$$E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M_c^2}{2m_n} \tag{10}$$

となる。

⑩式は， M_c が最小のとき，電子のエネルギーが最大になることを示している。静止質量 M_c は，陽子と反ニュートリノの重心系での両粒子の全エネルギーであり，陽子と反ニュートリノが同じ速度で運動するとき，すなわち，重心系で両粒子が静止するとき， M_c は最小値 $M = m_p + m_\nu$ をとる。これより，電子のエネルギーの最大値⑥を得る。