

理論第3問

Part A

ニュートリノの質量と中性子崩壊

相互作用していない質量 m_n の中性子は，実験室系で静止したまま，相互作用しない3つの粒子(陽子，電子と反ニュートリノ)に崩壊する。陽子の静止質量を m_p とし，反ニュートリノの静止質量 m_ν は，電子の静止質量 m_e より十分に小さいが0ではないとする。真空中の光速を c とし，各質量の測定値は次のとおりである。

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

下記において，すべてのエネルギーと速さは実験室系に対するものであり，崩壊により放出される電子の全エネルギーを E とする。

- (a) エネルギー E の最大値 $E_{\max}$ と， $E = E_{\max}$ のときの反ニュートリノの速さ v_m を，粒子の静止質量と光速を用いて表せ。また， $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ として， $E_{\max}$ と比 $\frac{v_m}{c}$ を有効数字3桁まで求めよ。

(原文にはない訳者によるヒント)

$$\text{静止質量 } m \text{ をもつ粒子の相対論的エネルギー } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ と運動量 } p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(v は粒子の速さ)の間には，

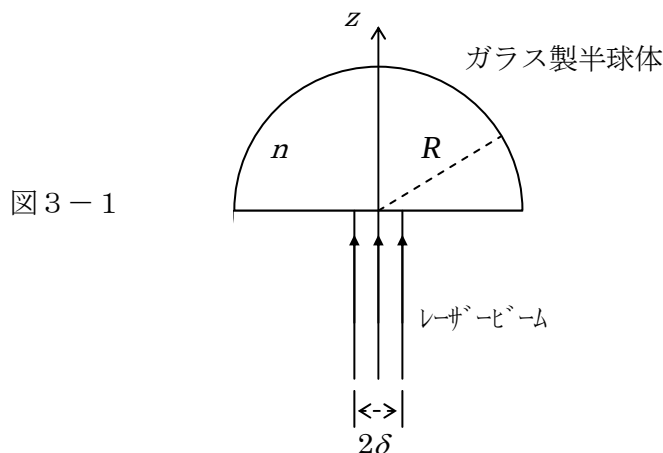
$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

の関係(「理論物理への道標下」(河合出版)p.238～参照)がある。この関係よりエネルギー保存則と運動量保存則を用いよ。

Part B

光線による浮揚

半径 R ，質量 m で屈折率 n のガラス製の半球体がある。半球体の外側の媒質の屈折率は 1 である。図 3-1 のように，平行で単色なレーザー光のビームが半球体の平面の中央部分に一様に入射している。重力加速度 $\vec{g}$ は鉛直下方に向いている。レーザービームの円形断面の半径 δ は R より十分に小さい。ガラス製半球体とレーザービームは， z 軸に関して軸対称である。



ガラス製の半球体はレーザー光を吸収せず，半球体の表面は，光線が入射あるいは透過する際反射が無視できるように薄い透明物質でコーティングされている。無反射表面層を通過するレーザー光の光路もまた無視できる。

- (b) 大きさ $\left(\frac{\delta}{R}\right)^3$ の項およびそれより高次の項を無視して，ガラス製半球体をつり合わせるのに必要なレーザーのパワー P を求めよ。

ヒント： θ が 1 に比べて十分に小さいとき，近似式 $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ を用いよ。

(原文にはない訳者によるヒント)

パワーとは，1つの断面を単位時間に通過するエネルギーのことである。

理論第3問 【解答】

Part A

ニュートリノの質量と中性子崩壊

(a) しばしば使われる光速 c の煩わしさを省くために、電子、陽子と反ニュートリノのエネルギーと運動量を、それぞれ、

$$(c^2 E_e, c\vec{q}_e), (c^2 E_p, c\vec{q}_p), (c^2 E_\nu, c\vec{q}_\nu)$$

と表す。こうすると、 $E_e, E_p, E_\nu, \vec{q}_e, \vec{q}_p, \vec{q}_\nu$ はすべて質量の単位をもつ。また、ベクトル $\vec{q}_\alpha$ の大きさを q_α ($\alpha = e, p$ または, ν) と書くと、

$$E_e^2 = m_e^2 + q_e^2, \quad E_p^2 = m_p^2 + q_p^2, \quad E_\nu^2 = m_\nu^2 + q_\nu^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の関係式が成り立つ。このとき、中性子崩壊におけるエネルギーと運動量の保存則は、

$$E_p + E_\nu = m_n - E_e$$

$$\vec{q}_p + \vec{q}_\nu = -\vec{q}_e$$

と表される。

上の2式の両辺を2乗すると、

$$E_p^2 + E_\nu^2 + 2E_p E_\nu = m_n^2 + E_e^2 - 2m_n E_e \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$q_p^2 + q_\nu^2 + 2\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。①式を用いて、②－③より、

$$m_p^2 + m_\nu^2 + 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu) = m_n^2 + m_e^2 - 2m_n E_e$$

よって、

$$2m_n E_e = m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu)$$

を得る。

いま、ベクトル $\vec{q}_p$ と $\vec{q}_\nu$ のなす角を θ として、

$$\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_p q_\nu \cos \theta \leq q_p q_\nu$$

となるから、ある運動量の大きさ q_p, q_ν に対して、すなわち、あるエネルギーの値 E_p, E_ν に対して、

$$2m_n E_e \leq m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - q_p q_\nu) \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。これから、陽子と反ニュートリノが同じ方向へ運動する($\vec{q}_p$ と $\vec{q}_\nu$ のなす角

は $\theta=0$)とき、電子のエネルギー $E=c^2 E_e$ が最大になることがわかる。

そこで次に、どのような $q_p, q_\nu(E_p, E_\nu)$ に対して E_e が最大になるかを考える。

いま、中性子が静止する実験室系で陽子と反ニュートリノの速さをそれぞれ v_p, v_ν と

し、 $\beta_p = \frac{v_p}{c}, \beta_\nu = \frac{v_\nu}{c}$ とおく。ここで、陽子に対して E_p と q_p を顕わに表せば、

$$E_p = \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta_p^2}}, \quad q_p = \beta_p \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta_p^2}} \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、反ニュートリノに対しても同様な式が書けるから、

$$E_p E_\nu - q_p q_\nu = m_p m_\nu \cdot \frac{1 - \beta_p \beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}}$$

と表される。 $(1-\beta_p \beta_\nu)^2 - (1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2) = (\beta_p - \beta_\nu)^2 \geq 0$ より、

$$\frac{1 - \beta_p \beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}} \geq 1$$

であり、等号は $\beta_p = \beta_\nu$ のとき成立する。これより、陽子と中性子の速さが等しいとき、

電子のエネルギー E の最大値 $E_{\max}$ は、 $M = m_p + m_\nu$ として、

$$\begin{aligned} E_{\max} &= c^2 (E_e)_{\max} = \frac{c^2}{2m_n} (m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2m_p m_\nu) \\ &= \frac{c^2}{2m_n} \{m_n^2 + m_e^2 - M^2\} \quad \dots \textcircled{6} \\ &\approx \underline{\underline{1.29 \text{ MeV}}} \end{aligned}$$

と求められる。ここで、題意より、 $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ であるから、有効数字3桁の数値計

算では、 $m_\nu \approx 0 \text{ MeV}/c^2$ となることに注意しよう。

⑤式より、 $\beta_p = \frac{q_p}{E_p}$ であり、同様に、 $\beta_\nu = \frac{q_\nu}{E_\nu}$ となる。電子のエネルギーが最大にな

るとき、 $v_\nu \rightarrow v_m$ として、陽子と反ニュートリノは、同じ向きに運動することから、

$$\frac{v_m}{c} = (\beta_\nu)_{E_{\max}} = (\beta_p)_{E_{\max}} = \left(\frac{q_p + q_\nu}{E_p + E_\nu} \right)_{E_{\max}} = \left(\frac{q_e}{m_n - E_e} \right)_{E_{\max}} = \frac{\sqrt{(E_e)_{\max}^2 - m_e^2}}{m_n - (E_e)_{\max}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M^2)^2 - 4m_n^2 m_e^2}}{2m_n^2 - (m_n^2 + m_e^2 - M^2)} \\
&= \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2} \\
&\approx \underline{\underline{1.27 \times 10^{-3}}}
\end{aligned}$$

(別解)

(a) 陽子と反ニュートリノが全エネルギー $c^2 E_c$ ，全運動量 $c\vec{q}_c$ ，静止質量 M_c をもつ系と

考えると，もう少しエレガントな解答が可能である。

$$E_c = E_p + E_\nu, \quad \vec{q}_c = \vec{q}_p + \vec{q}_\nu, \quad E_c^2 = M_c^2 + q_c^2$$

であり，エネルギー保存則と運動量保存則は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
E_c + E_e &= m_n \\
\vec{q}_c &= -\vec{q}_e
\end{aligned} \tag{7}$$

である。これより，

$$E_c^2 - M_c^2 = q_c^2 = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2$$

よって，

$$E_c^2 - E_e^2 = M_c^2 - m_e^2 \tag{8}$$

となる。⑧÷⑦から，

$$E_c - E_e = \frac{M_c^2 - m_e^2}{m_n} \tag{9}$$

を得，⑦，⑨式から，

$$E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M_c^2}{2m_n} \tag{10}$$

となる。

⑩式は， M_c が最小のとき，電子のエネルギーが最大になることを示している。静止質量 M_c は，陽子と反ニュートリノの重心系での両粒子の全エネルギーであり，陽子と反ニュートリノが同じ速度で運動するとき，すなわち，重心系で両粒子が静止するとき， M_c は最小値 $M = m_p + m_\nu$ をとる。これより，電子のエネルギーの最大値⑥を得る。

Part B

光線による浮揚

(b) 図3-aにおいて、球面上の点Aにおけるレーザー光の入射角を θ_i 、屈折角を θ_t とすると、屈折の法則(スネルの法則)は、

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_t \quad \dots \textcircled{11}$$

いま、 $R \sin \theta_i = r \leq \delta$ より、 θ_i, θ_t は $\frac{\delta}{R}$ 程度の量であるから、 $\theta_i^3, \theta_t^3 \left(\left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \right)$ 以上の項を無視して、

⑪式は

$$n\theta_i \approx \theta_t$$

となる。また、

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx (n-1)\theta_i$$

である。

単位面積を単位時間あたりに通過するレーザー光

のエネルギーを $p = \frac{P}{\pi \delta^2}$ とする。 z 軸に垂直な半径 r と $r + \Delta r$ の円で囲まれた円環を単位時間に通過するエネルギー ΔP は、 $r = R \sin \theta_i \approx R \theta_i$ 、 $\Delta r \approx R \Delta \theta_i$ を用いて、

$$\Delta P \approx p \cdot 2\pi r \Delta r \approx \frac{P}{\pi \delta^2} \cdot 2\pi R^2 \cdot \theta_i \Delta \theta_i = \frac{2PR^2}{\delta^2} \theta_i \Delta \theta_i$$

となる。光のエネルギー ε と運動量の大きさ q の間には、 $\varepsilon = cq$ の関係があり、半球体が z 軸方向に受ける力は、単位時間あたりの光の運動量変化の z 成分の大きさに等しいから、上の円環を通過するレーザー光から半球体を受ける力は z 成分のみをもち、

$$\Delta F_z = \frac{\Delta P}{c} (1 - \cos \beta) \approx \frac{2PR^2}{c\delta^2} \cdot \frac{\beta^2}{2} \theta_i \Delta \theta_i \approx \frac{PR^2(n-1)^2}{c\delta^2} \theta_i^3 \Delta \theta_i$$

である。

これより、半球体がパワー P のレーザー光から受ける力は、

$$F_z = \sum \Delta F_z = \frac{PR^2(n-1)^2}{c\delta^2} \int_0^{\theta_{im}} \theta_i^3 d\theta_i = \frac{PR^2(n-1)^2}{4c\delta^2} \theta_{im}^4$$

となる。ここで、 $\theta_{im} \approx \frac{\delta}{R}$ であることを用いて、半球体の力のつり合い $F_z = mg$ は、

$$\frac{PR^2(n-1)^2}{4c\delta^2} \cdot \frac{\delta^4}{R^4} = \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \cdot \frac{P}{c} = mg$$

これより、

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2}$$

を得る。

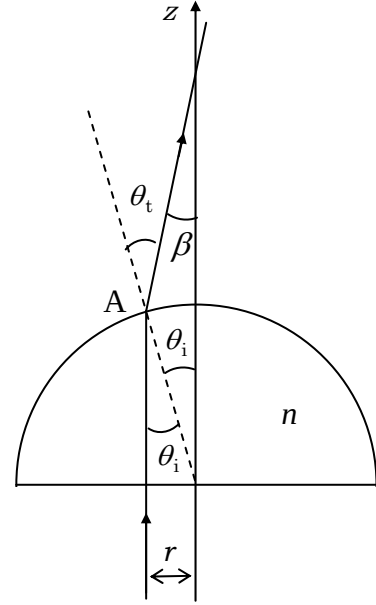


図3-a