IPhO 2003 (Taipei,Taiwan)

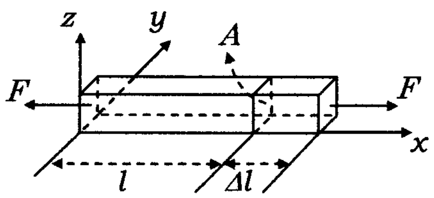
理論第２問　　　　　　　***交流電圧下での圧電性結晶の共鳴***

長さlで断面積Aの一様な棒に応力が作用していない状態を考えよう(図２－１)。逆向きで等しい大きさFの力が両端面に，面に垂直に作用すると，棒の長さはΔlだけ変化する。端面に作用する**応力**Tは$\dfrac{F}{A}$で定義される。長さの変化の割合$\dfrac{\Delta l}{l}$は，棒の**ひずみ**Sと呼ばれる。応力とひずみにより，フックの法則は，

$$T = YS \quad \text{あるいは} \quad \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

と表される。ここで，Yはこの棒の**ヤング率**と呼ばれる。圧縮性応力Tは$F<0$に対応し，長さを短くする($\Delta l<0$)。このような応力Tは負の値をもち，圧力pと関係式$T=-p$で結ばれる。

図２－１



密度ρの一様な棒に対し，棒に沿って伝わる縦波の伝播する速さuは，

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

で与えられる。

以下の設問において，減衰と散逸の影響は無視できるものとする。

Part A：力学的性質

図２－２のように，$x=0$から∞まで伸びている半無限の長さをもつ密度ρの一様な棒がある。棒は，はじめ静止しており応力はかけられていない。いま，$x=0$の左端面に一様に小さな圧力pを微小時間Δtだけ作用させると，圧力波(圧力pの領域)が右方へ速さuで伝播する。

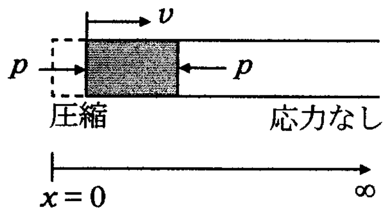


図２－２

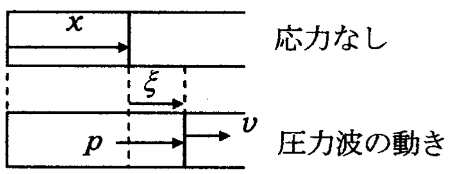


図２－３

(a) ピストンを用いて棒の左端面を時間Δtの間一定速度vで動かすとき(図２－２)，左面でのひずみSと圧力pはいくらか。ρ, u, vのみを用いて答えよ。

(b) 棒の中をx軸に沿って進む縦波を考える。棒に応力がかけられていない場合(図２－３)，位置xで時刻tにおける断面の変位$\xi(x,t)$が，ξ_0とkを定数として，

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut)$$

で与えられるとする。対応する速度$v(x,t)$，ひずみ$S(x,t)$，圧力$p(x,t)$を求めよ。

Part B：電気力学的性質（圧電効果を含む）

図２－４のように，x軸，y軸，z軸をとり，長さb，幅w，厚さhの水晶の結晶平板を考える。結晶の上面と下面には金属性のコーティングが施され，電極がつくられている。固定用の支持としても役立つ導線が電極の中心に繋がれている(図２－５)。電極の中心はx軸方向の縦振動に対して静止していると仮定する。

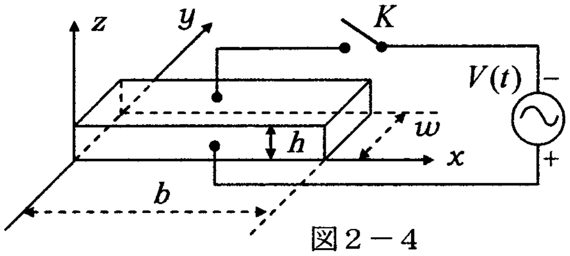


図２－４

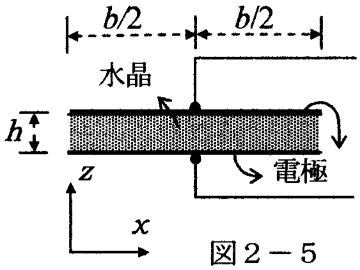


図２－５

水晶の結晶密度ρは$2.65\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$であり，ヤング率$Y$は，$7.87\times10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$である。

平板の長さbは 1.00 cm で，幅wと高さhは $h \ll w$であり，$w \ll b$であるとする。スイッチKは開かれており，水晶の平板には，x軸方向に定在波(定常波)としての**縦波モード**のみが生じると仮定する。

振動数$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$の定在波に対して，平衡位置がxである平板の断面の時刻tにおける変位$\xi(x,t)$は，ξ_0を正の定数として，

$$\xi(x,t) = 2\xi_0\, g(x) \cos \omega t\,, \qquad (0 \le x \le b)$$

で与えられ，空間関数$g(x)$は，

$$g(x) = B_1 \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) \qquad \cdots(\text{ii})$$

と表され，$g(x)$の最大値は１で$k = \dfrac{\omega}{u}$である。ただし，電極の中心は静止しており，平板の左右の端面は自由で応力(あるいは圧力)はかかっていないことに注意せよ。また，(気柱の共鳴における)開口端補正は，この場合，無視できる。

(c) 水晶平板中の縦波の定在波(高校課程で習う定常波)に対し，(ⅱ)式中のB_1とB_2の値を求めよ。

(d) 水晶平板中に縦波の定在波が生じているとき，その中で小さい方から２つの振動数を求めよ。

圧電効果は，水晶の結晶がもつ特性である。結晶を圧縮または膨張させると，結晶に，それを横切る電圧が生じ，逆に，結晶を横切って外部電圧をかけると，電圧の極性に応じて結晶が引き伸ばされたり縮められたりする。それゆえ，力学的および電気的な振動は結合して，水晶の結晶に共鳴を起こす。

圧電効果を考察するために，水晶平板にz軸方向の電場をかけたら，上下の電極にそれ

ぞれ$-\sigma$,$+\sigma$の密度の電荷が現れた。x軸方向の平板のひずみと応力を，それぞれSとTとする。このとき，水晶の結晶の圧電効果は，次の２つの方程式によって表される。

$$S=\frac{1}{Y}T+d_pE \qquad \cdots(\text{iii})$$

$$\sigma=d_pT+\varepsilon_T E \qquad \cdots(\text{iv})$$

ここで，一定電場下での弾性ひずみ定数(ヤング率の逆数)は，$\frac{1}{Y}=1.27\times10^{-11}\ \mathrm{m^2/N}$，一定応力下での誘電率は，$\varepsilon_T=4.06\times10^{-11}\ \mathrm{F/m}$，また，圧電係数は，$d_p=2.25\times10^{-12}\ \mathrm{m/V}$である。

図２－４において，スイッチKを閉じると，交流電圧$V(t)=V_{\mathrm{m}}\cos\omega t$が電極にかけられ，水晶平板内には$z$軸方向へ一様な電場$E(t)=\frac{V(t)}{h}$が現れる。定常状態に達すると，平板の$x$軸方向へ角振動数$\omega$の縦波の定在波の振動が現れる。

電場Eが一様であると，平板での縦波定在波の波長λと振動数fの間には，uを(ｉ)式で与えられる速さとして，$\lambda=\frac{u}{f}$の関係がある。しかし，ひずみと応力の定義は変わらず，平板の端面は自由で応力が作用しないが，(iii)式が示すように，$T=YS$はもはや成り立たない。

(e) (iii)，(iv)式を考慮すると，下側電極の表面電荷密度σは，xとtの関数として，

$$\sigma(x,t)=\left\{D_1\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+D_2\right\}\frac{V(t)}{h}$$

と表される。ここで，$k=\frac{\omega}{u}$である。D_1とD_2を文字式を用いて表せ。

(f) 下側電極表面の全表面電荷$Q(t)$は，電圧$V(t)$との間に，

$$Q(t)=\left\{1+\alpha^2\left(\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2}-1\right)\right\}C_0V(t)$$

の関係がある。C_0およびα^2を文字式を用いて表せ。さらに，α^2を数値で表せ。

理論第２問　【解答】

交流電圧下での圧電性結晶の共鳴

Part A

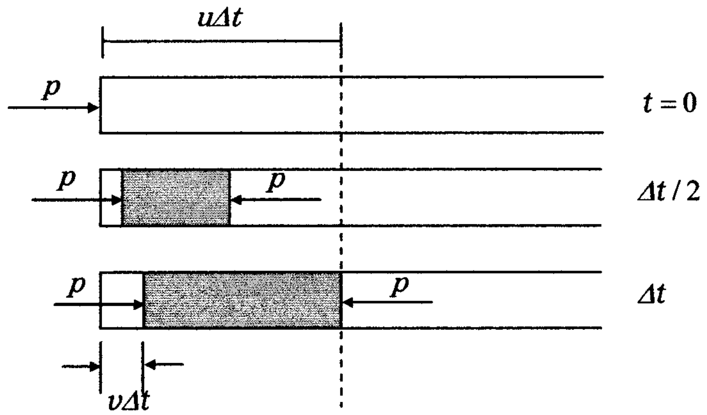
(a) 図２－ａのように，微小時間Δtに棒の左端面は距離$v\Delta t$だけ移動し，圧力波は速さ$u=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$で距離$u\Delta t$だけ進む。よって左面でのひずみは，

$$S=\frac{\Delta l}{l}=\frac{-v\Delta t}{u\Delta t}=\underline{-\frac{v}{u}}$$

フックの法則から左面での圧力は，

$$p=-YS=Y\frac{v}{u}=\underline{\rho uv}$$

図２－ａ



(b) 位置xの断面は正弦関数にしたがって単振動をしている。よってその速度は，単振動している粒子の速度と同じであり，変位ξを位置xを固定して時刻tで微分(これを**偏微分**といい，$\dfrac{d}{dt}$ではなく$\dfrac{\partial}{\partial t}$と表す)すればよい。

$$v(x,t)=\frac{\partial\xi}{\partial t}=\underline{-ku\xi_0\cos k(x-ut)}$$

設問(a)の結果を用いて，

$$S(x,t)=-\frac{v(x,t)}{u}=\underline{k\xi_0\cos k(x-ut)}$$

$$p(x,t)=\rho uv(x,t)=\underline{-k\rho u^2\xi_0\cos k(x-ut)}$$

あるいは，

$$p(x,t)=-YS(x,t)=\underline{-kY\xi_0\cos k(x-ut)}$$

(別解)

ひずみSは，時刻tを固定したときの位置xの変化であるから，

$$S(x,t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\underline{k\xi_0\cos k(x-ut)}$$

として求めることもできる。

Part B

(c) 電極の中心は静止していると仮定されているから，$g\left(\dfrac{b}{2}\right)=0$ である。よって，$B_2=\underline{0}$ であり，$g(x)$の最大値が１であることから，$B_1=\underline{\pm 1}$

これより，変位ξは，

$$\xi(x,t)=\pm 2\xi_0 \sin k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos\omega t$$

と表される。

(d) 水晶平板の両端が自由端であるから，長さbの開管の気柱の共鳴と同様に考えることができる。電極の中心が静止しているのであるから，平板の２等分面は節となる。よって，振動数が最小の固有振動は基本振動であり，次に振動数が小さい固有振動は３倍振動となる(図２－ｂ)。２倍振動は平板の２等分面が腹となるから除かれる。

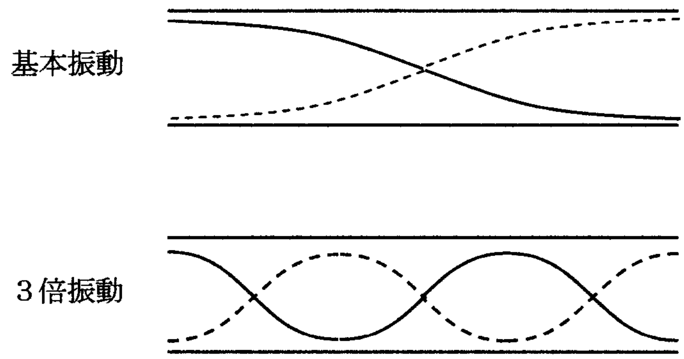


図２－ｂ

基本振動のとき，波長は$\lambda=2b$であり，その振動数f_1は，波の伝播速度

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}=\sqrt{\frac{7.87\times10^{10}}{2.65\times10^{3}}}=5.45\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

を用いて，

$$f_1=\underline{\frac{u}{2b}}=\frac{5.45\times10^{3}}{2\times1.00\times10^{-2}}=272.5\times10^{3}\,[\mathrm{Hz}]\fallingdotseq\underline{273\ [\mathrm{kHz}]},$$

次の振動数f_3は，

$$f_3=3f_1=\underline{\frac{3u}{2b}}=817.5\times10^{3}\,[\mathrm{Hz}]\fallingdotseq\underline{818\ [\mathrm{kHz}]}$$

(e) 問題文中の(iii),(iv)式より，応力Tと面電荷密度σは，次のように書かれる。

$$T=Y(S-d_pE) \qquad \cdots①$$

$$\sigma=Yd_pS+\varepsilon_T\left(1-Y\frac{{d_p}^2}{\varepsilon_T}\right)E \qquad \cdots②$$

平板の中心($x=\dfrac{b}{2}$)が静止しているから(変位が0)，交流電圧$V(t)=V_m\cos\omega t$をかけたときの位置xでの断面の変位$\xi(x,t)$とひずみ$S(x,t)$は，位相のずれを一般にϕとすると，正の定数ξ_mを用いて，

$$\xi(x,t)=\xi_m\sin k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos(\omega t+\phi)$$

$$S(x,t)=k\xi_m\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos(\omega t+\phi) \qquad \cdots③$$

と表される。

③式と電極間の電場$E(x,t)=\dfrac{V(t)}{h}=\dfrac{V_m\cos\omega t}{h}$を①式へ代入すると，

$$T=Y\{k\xi_m\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos(\omega t+\phi)-\frac{d_p}{h}V_m\cos\omega t\}$$

となる。応力Tが平板の両端($x=0,b$)でつねに0であることから，$\phi=0$で，

$$k\xi_m\cos\frac{kb}{2}=d_p\frac{V_m}{h}$$

となる。$\phi=0$として③式と電場$E(x,t)$を②式へ代入して，

$$\sigma(x,t)=\left\{Yd_pk\xi_m\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+\varepsilon_T\left(1-Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\right)\frac{V_m}{h}\right\}\cos\omega t$$

$$=\left\{Y\frac{d_p^{\,2}}{\cos\frac{kb}{2}}\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+\varepsilon_T\left(1-Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\right)\right\}\frac{V_m\cos\omega t}{h}$$

よって，

$$\underline{D_1=Y\frac{d_p^{\,2}}{\cos\frac{kb}{2}}},\qquad \underline{D_2=\varepsilon_T\left(1-Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\right)}$$

(f) 下側電極の全電荷$Q(t)$と電圧$V(t)=V_m\cos\omega t$の比は，

$$\frac{Q(t)}{V(t)}=\frac{1}{V(t)}\int_0^b\sigma(x,t)w\,dx$$

$$=\frac{w}{h}\int_0^b\left\{Y\frac{d_p^{\,2}}{\cos\frac{kb}{2}}\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+\varepsilon_T\left(1-Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{\varepsilon_T bw}{h}\left\{Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\cdot\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2}+\left(1-Y\frac{d_p^{\,2}}{\varepsilon_T}\right)\right\}$$

$$=C_0\left\{\alpha^2\cdot\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2}+\left(1-\alpha^2\right)\right\}$$

となる。よって,

$$C_0=\underline{\frac{\varepsilon_T bw}{h}},\qquad \alpha^2=Y\underline{\frac{d_p{}^2}{\varepsilon_T}}=\frac{(2.25)^2\times10^{-2}}{1.27\times4.06}=\underline{9.82\times10^{-3}}$$

ここで,αは**電気力学的結合定数**と呼ばれる。

注：静的極限$k\to0(\lambda\to\infty)$をとると,定数C_0の意味が明らかになる。

$$\lim_{k\to0}\frac{Q(t)}{V(t)}=C_0\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\}=C_0$$

これは,C_0が平行板コンデンサーの電気容量であることを示している。いま電極(極板)の面積はbwであり,極板間の誘電体の誘電率がε_Tであるから,極板間の電気容量は,

$C_0=\dfrac{\varepsilon_T bw}{h}$で与えられる。