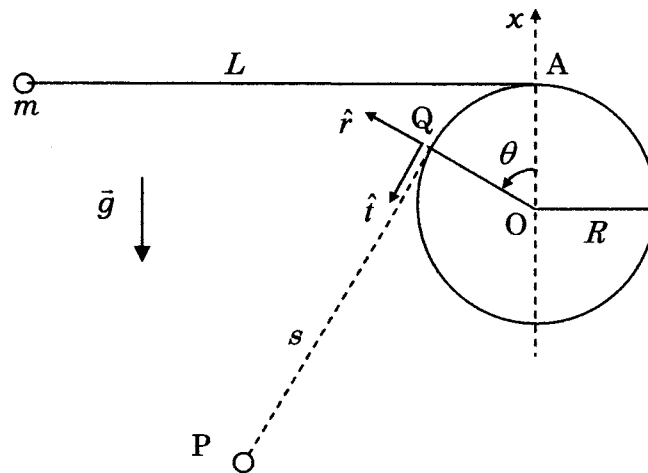


理論第1問

落下するおもりの振動運動

図1-1のように、半径 R の円柱状の棒(棒は紙面に垂直方向を向いている)が地面の上方に水平に保たれている。棒の頂上の1点 A に長さ $L(L > 2\pi R)$ で質量の無視できる糸がつながれ、糸の先端には質量 m の振り子状の球が付けられている。球は点 A と同じ高さまで引き上げられ、糸がぴんと張られたまま静かに放された。糸の伸びは無視せよ。球は質点とみなされ、棒の軸に垂直な1つの平面内でのみ振動運動をする。以下適宜、球を粒子とも呼ぶ。重力加速度は $\vec{g}$ ($|\vec{g}| = g$) である。

図1-1



座標の原点を O とする。粒子が点 P にあるとき、糸は円柱面に Q で接している。線分 QP の長さを s とする。 Q での単位接線ベクトルと単位法線ベクトルをそれぞれ $\hat{t}$ と $\hat{r}$ とする。半径 OQ の回転角 θ は、 OA に沿った鉛直な x 軸から反時計回りに計った角を正として表す。

$\theta = 0$ のとき、長さ s は L に等しく、粒子の重力の位置エネルギー U はゼロである。粒子が運動するとき、 θ と s の瞬間的な時間変化率は、それぞれ $\dot{\theta}$, $\dot{s}$ と表される。

特に指定されていないとき、すべての速さと速度は固定点 O に対するものである。

Part A

Part A では、粒子が運動しているとき糸はぴんと張られている。上で用いられた量(すなわち、 $m, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, R, L, g, \hat{t}$ と $\hat{r}$)を用いて、

- $\dot{\theta}$ と $\dot{s}$ の関係
- 動点 Q の点 O に対する速度 $\vec{v}_Q$
- 粒子が点 P にあるとき、動点 Q に対する粒子の相対速度 $\vec{v}'$
- 粒子が点 P にあるとき、点 O に対する粒子の速度 $\vec{v}$
- 粒子が点 P にあるとき、点 O に対する粒子の加速度の $\hat{t}$ 成分
- 粒子が点 P にあるとき、粒子の重力の位置エネルギー U
- 軌道の最低点における粒子の速さ v_m を表せ。

Part B

Part B では、 L と R の比を次の値とする。

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

ただし、 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ である。

- (h) P Q間の糸が直線であり、かつ長さが最小になるときの粒子の速さ v_s はいくらか。 g と R で表せ。
- (i) 粒子が棒の右側を振動運動しているとき、粒子の最高点での速さ v_H はいくらか。 g と R で表せ。

Part C

Part C では、図 1-2 のように、質量 m の振り子状の球を、点 A からつす代わりに、糸の他端に質量 $M (> m)$ のおもりを付けて棒にかける。球と点 A の間の糸の長さは L で水平に保たれ、おもりは棒の下方につるされる。以下では、おもりもまた、質点として扱われる。

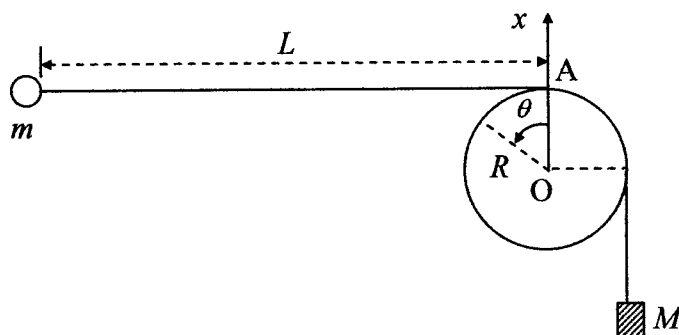


図 1-2

球が静かに放されると同時に、おもりは落下し始める。球は落下するおもりに何ら邪魔されることなしに振動運動をすることができるものとする。糸と棒表面との動摩擦は無視できる。しかし、その静止摩擦は、おもりの速度が一度ゼロになったらそのまま静止し続けるほど大きいものとする。

- (j) おもりは距離 $D ((L-D) \gg R)$ だけ落下したら静止するものとする。 $\theta = 2\pi$ まで粒子が

糸を張ったまま振動運動をするためには、比 $\alpha = \frac{D}{L}$ はある臨界値 α_c より大きくなけれ

ばならない。大きさ $\frac{R}{L}$ の項およびその高次の項を無視して、 α_c を $\frac{M}{m}$ を用いて求めよ。

理論第1問 【解答】

落下するおもりの振動運動

Part A

(a) 糸の長さ $L = s + R\theta$ は一定であるから,

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$$

(b) Qは角速度 $\dot{\theta}$ で半径 R の円運動をするので,

$$\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t} = -\dot{s}\hat{t}$$

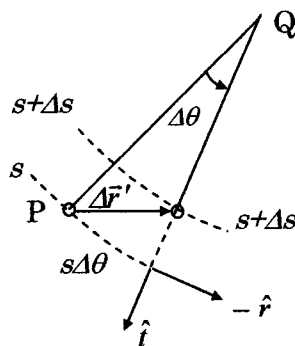
(c) 図1-aより, 微小時間 Δt でのPのQに対する相対的変位は,

$$\Delta\vec{r}' = (s\Delta\theta)(-\hat{r}) + (\Delta s)\hat{t} = \{(s\dot{\theta})(-\hat{r}) + \dot{s}\hat{t}\}\Delta t$$

であるから,

$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} = -s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t}$$

図1-a



(d) 粒子のOに対する速度は,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_Q = (-s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t}) - \dot{s}\hat{t} = -s\dot{\theta}\hat{r} \quad \dots \textcircled{1}$$

(e) 図1-bより, 速度変化 $\Delta\vec{v}$ の $\hat{t}$ 成分は $-v\Delta\theta$ であり, 粒子の速さ v は, ①式から $s\dot{\theta}$ で

ある。よって, 加速度 $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ の $\hat{t}$ 成分は,

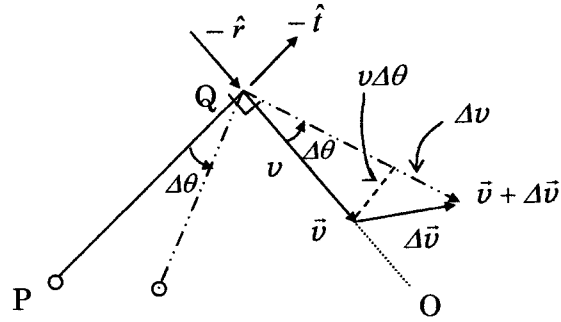
$$\vec{a} \cdot \hat{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = -(s\dot{\theta})\dot{\theta} = -s\dot{\theta}^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

また, 加速度の $\hat{r}$ 成分は,

$$\vec{a} \cdot \hat{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d}{dt}(s\dot{\theta}) = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})$$

となる。

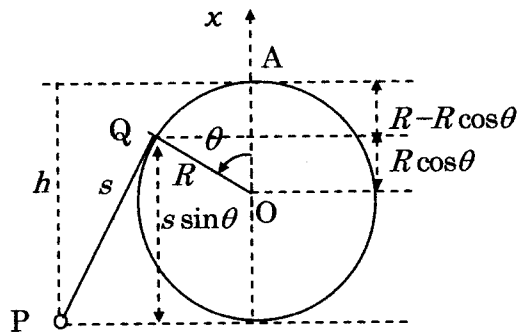
図 1-b



(f) 図 1-c より,

$$U(\theta) = -mg\{R(1 - \cos\theta) + s \sin\theta\} \quad \dots \textcircled{3}$$

図 1-c



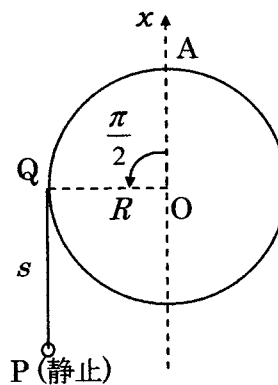
(g) ①式より, 粒子の速度 $\vec{v}$ は $(-\hat{r})$ 成分のみをもつから, 図 1-d のように, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のと

き, 速度の鉛直成分は 0 となり, 粒子は軌道の最低点を通る。このとき, $s = L - \frac{\pi}{2}R$

であるから, 重力の位置エネルギーは,

$$U_m = U\left(\frac{\pi}{2}\right) = -mg\left(R + L - \frac{\pi}{2}R\right)$$

図 1-d



力学的エネルギー保存則は,

$$0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m$$

となるから, これより,

$$v_m = \sqrt{-\frac{2U_m}{m}} = \sqrt{2g\left(R + L - \frac{\pi}{2}R\right)}$$

Part B

(h) ③式を用いて、力学的エネルギー保存則は、

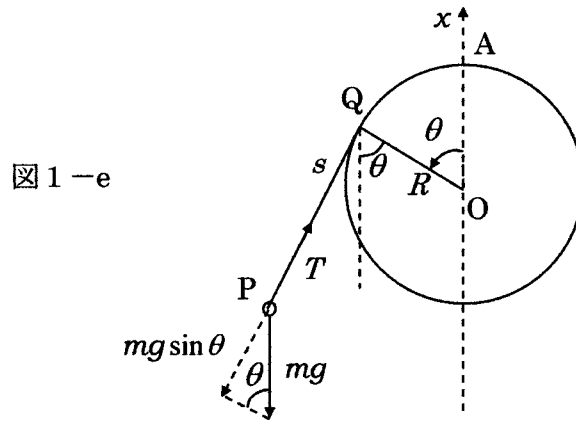
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 - mg\{R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta\} \quad \cdots④$$

ここで、①式から、速さ v は $s\dot{\theta}$ に等しいから、④式より、

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g\{R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta\} \quad \cdots⑤$$

糸の張力を T とする。②式より、粒子の加速度の $\hat{t}$ 成分は $-s\dot{\theta}^2$ であるから、 $\hat{t}$ 方向の粒子の運動方程式は(図1-e)、

$$m(-s\dot{\theta}^2) = -T + mg\sin\theta \quad \cdots⑥$$



⑤,⑥式から、張力 T は、

$$\begin{aligned} T = m(s\dot{\theta}^2 + g\sin\theta) &= \frac{mg}{s}\{2R(1 - \cos\theta) + 3s\sin\theta\} \\ &= \frac{2mgR}{s}\left\{\tan\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\left(\theta - \frac{L}{R}\right)\right\}\sin\theta \\ &= \frac{2mgR}{s}(y_1 - y_2)\sin\theta \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$ と $s = L - R\theta$ を用いた。

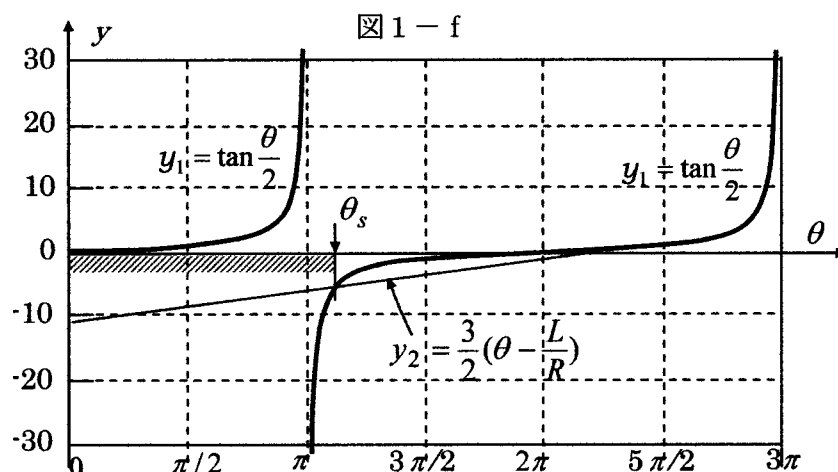
関数 $y_1 = \tan\frac{\theta}{2}$ と $y_2 = \frac{3}{2}\left(\theta - \frac{L}{R}\right)$ のグラフは図1-fのようになる。これより、張力が0になる角 θ_s は、

$$\frac{3}{2}\left(\theta_s - \frac{L}{R}\right) = \tan \frac{\theta_s}{2} \quad \text{すなわち, } \frac{L}{R} = \theta_s - \frac{2}{3} \tan \frac{\theta_s}{2}$$

を満たし, $0 < \theta < \pi$ で $\sin \theta > 0$, $\pi < \theta < 2\pi$ で $\sin \theta < 0$ であることから, $0 < \theta < \theta_s$ で $T > 0$, $\theta_s < \theta < 2\pi$ で $T < 0$ となることがわかる。ここで題意より,

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = \frac{9\pi}{8} - \frac{2}{3} \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} \right) = \frac{9\pi}{8} - \frac{2}{3} \tan \frac{1}{2} \cdot \frac{9\pi}{8}$$

と書けるから, $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$ である。



$\theta = \theta_s$ のとき, s は最小値

$$s_{\min} = L - R\theta_s = R \left(\frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} - \frac{9\pi}{8} \right) = \frac{2}{3} R \cot \frac{\pi}{16} = 3.352R$$

となる。またこのとき, ⑥式に $T = 0$ を代入して,

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = -gs \sin \theta$$

となるから, 求める速さ v_s は,

$$v_s = \sqrt{-gs_{\min} \sin \theta_s} = \sqrt{\frac{2gR}{3} \cot \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3} \cos \frac{\pi}{16}} = 1.133\sqrt{gR}$$

- (i) 図 1 - g のように, $\theta \geq \theta_s$ のとき, 粒子は点 $P(x_s, y_s)$ から初速 v_s で投げ出される。放物運動の最高点での粒子の速さ v_H は, 初速度の y 成分に等しいから,

$$v_H = v_s \sin(\theta_s - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3} \cos \frac{\pi}{16}} \sin \frac{\pi}{8} = 0.4334\sqrt{gR}$$

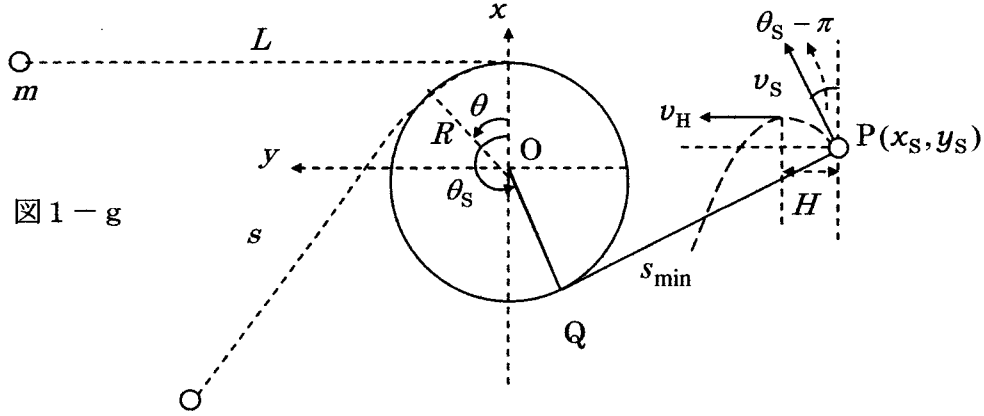


図 1 - g

点Pから最高点までの水平距離Hは,

$$H = \frac{v_s^2 \sin 2(\theta_s - \pi)}{2g} = \frac{v_s^2}{2g} \sin \frac{\pi}{4} = 0.4539R$$

であり,

$$x_s = R \cos \theta_s - s_{\min} \sin \theta_s = -R \cos \frac{\pi}{8} + s_{\min} \sin \frac{\pi}{8} = 0.359R$$

$$y_s = R \sin \theta_s + s_{\min} \cos \theta_s = -R \sin \frac{\pi}{8} - s_{\min} \cos \frac{\pi}{8} = -3.480R$$

となるから, 明らかに, $|y_s| > (R + H)$ である。よって, 粒子は棒の表面に衝突せずに最高点に達することができる。

Part C

- (j) おもりが静止する前に糸がたるむと, 糸がたるんだ状態でおもりは静止することはできないので, おもりが静止した後 $\theta = 2\pi$ まで糸がたるまない条件を求めればよい。

点Aと同じ高さを粒子の重力の位置エネルギーの基準とすると, おもりが距離Dだけ落下して静止した後, 粒子の力学的エネルギー E' は一定に保たれ,

$$E' = MgD$$

と表される。

おもりは静止しているとして,

$$s = L - D - R\theta$$

となり, 粒子の力学的エネルギー保存則は,

$$E' = MgD = \frac{1}{2}mv^2 - mg\{R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta\}$$

である。これより,

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = \frac{2MgD}{m} + 2gR\{(1 - \cos \theta) + \frac{s}{R} \sin \theta\}$$

となる。粒子の運動方程式⑥を用いて,

$$T = m(s\dot{\theta}^2 + g \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{mg}{s} \left\{ \frac{2M}{m} D + 2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta \right\} \\ &= \frac{2mgR}{s} \left\{ \frac{MD}{mR} + (1 - \cos \theta) + \frac{3}{2} \left(\frac{L-D}{R} - \theta \right) \sin \theta \right\} \\ &\approx \frac{2mgR}{s} \left(\frac{MD}{mR} + \frac{3(L-D)}{2R} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

を得る。最後の式変形では、 $(L-D) \gg R$ を考慮した。

粒子が棒のまわりを振動運動しているとき、張力は $\theta = \frac{3\pi}{2}$ で最小になるから、 $\theta = 2\pi$

まで糸がたるまない条件は、 $T \geq 0$ に $D = \alpha L$ を用いて、

$$\frac{MD}{mR} - \frac{3(L-D)}{2R} = \frac{3L}{2R} \left\{ \left(1 + \frac{2M}{3m} \right) \alpha - 1 \right\} \geq 0$$

となる。よって、臨界値 α_c は、

$$\alpha \geq \alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}$$