

理論第3問

プラズマ・レンズ

強化粒子線の物理は、基礎研究だけでなく医学や産業にも多大な影響力をもつ。プラズマ・レンズは、端に非常に強い焦点をもつ線形コリダー(衝突器)である。プラズマ・レンズの可能性を評価するためには、これを通常の静電磁気的なレンズと比較するのがよい。磁気レンズにおいて、焦点に粒子を集める能力は磁場の傾斜に比例する。四重極レンズの実際的な上限値は 10^2 T/m のオーダーであるが、密度 10^{17} cm^{-3} のプラズマ・レンズの能力は、磁場の傾斜 $3 \times 10^6 \text{ T/m}$ に相当し、磁気四重極レンズの約 10^4 倍である。

下記において、強化相対論的粒子線が自己集中線となり、自由空間にそれ自身吹き飛ばされることはないことを明らかにしよう。実験はすべて真空中で行われるものとし、電気素量を e 、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とする¹⁾。

- a) 実験室系において、一様な数密度 n 、平均の速さ v で半径 R の長い円柱状の電子線を考える。電子線の中心軸から r ($< R$) だけ離れた点の電場の表式を、古典電磁気学を用いて導け。
- b) 設問 a) と同じ点での磁場の表式を導け。
- c) 上記の点を通過する電子線の電子にはたらく外向きの合力を求めよ。ただし、
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$
 である。
- d) 設問 c) で得られた表式が相対論的な速度にまで適用できると仮定して、速さ v が光速 c に近づくとき、電子にはたらく力はどうなるか求めよ。
- e) 半径 R の電子線が一様なプラズマ中に入り長い時間がたった後、電子線の外側で距離 r' の点で静止しているプラズマの正イオンと電子にはたらく力はそれぞれいくらか。ただし、プラズマは同じ電荷密度の1 価の正イオンと電子からなるイオン化された気体とし、長い時間がたった後、プラズマの正イオンあるいは電子の密度は n_0 ($< n$) の一定値であり、軸対称性は保たれているものとする。
- f) 十分に時間がたった後、プラズマ・イオンの密度 n_0 は一定で軸対称性は保たれているものとする。このとき、プラズマ中で中心軸から距離 r の点にある電子線の電子にはたらく力を求めよ。また、 $v \rightarrow c$ のときの力を求めよ。

¹⁾ 【解答】が一意的に定まるように、原文に波線の文字を加えました。

理論第3問 【解答】

プラズマ・レンズ

- a) 図 a のように，電子線の中心軸(これを z 軸とし，電子線の進行方向を z 軸の正の向きとする)のまわりの半径 r ，長さ l の円柱を考えてガウスの法則を用いる。外向きを正として円柱表面での電場を E_r とすると，

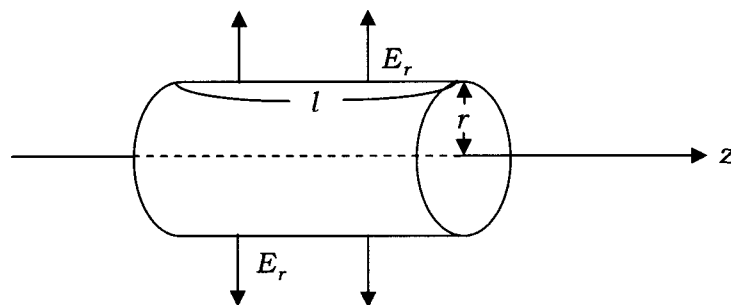


図 a

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{(-e)n \cdot \pi r^2 l}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad E_r = -\frac{enr}{2\epsilon_0}$$

- b) 電子線の中心軸のまわりの半径 r の円柱内を流れる電流 i は， z 軸の正の向きを正として， $i = -en \cdot \pi r^2 v$ と書けるから，円柱面に沿って z 軸正方向へ進む右ねじの回る向きの磁束密度 B_θ を正とすると，アンペールの法則¹⁾より，

$$B_\theta \cdot 2\pi r = \mu_0 i = -\pi \mu_0 en r^2 v \quad \therefore \quad B_\theta = -\frac{\mu_0 en r v}{2}$$

- c) 中心軸から距離 r の点を z 軸正方向へ速さ v で運動する電子には，外向きを正として，電場 E_r から，

$$f_E^e = (-e)E_r = \frac{e^2 nr}{2\epsilon_0}$$

の力が，磁場から，

$$f_B^e = -(-e)vB_\theta = -\frac{\mu_0 e^2 nr v^2}{2}$$

の力がはたらく。よって，電子にはたらく合力 f_e は， $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ を用いて，

$$f^e = f_E^e + f_B^e = \frac{e^2 nr}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

¹⁾ 【解説】 参照。

d) ①式において、 $v \rightarrow c$ として、 $f^e \rightarrow 0$

e) 静止したプラズマ・イオンには、電場のみから力がはたらく。電子線が入射した瞬間、プラズマ・イオンの正電荷と電子の電荷密度の和は0であるから、プラズマの正イオンと電子には、電子線からの電場 E_r^0 のみから力がはたらく。電場 E_r^0 は、設問 a) と同様に、ガウスの法則より、

$$E_r^0 \cdot 2\pi r' l = \frac{(-e)n \cdot \pi R^2 l}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad E_r^0 = -\frac{enR^2}{2\epsilon_0 r'}$$

この結果、正イオンには電子線の中心軸方向への引力がはたらき集められるが、電子には外向きの力がはたらくため、吹き飛ばされる。長い時間がたてば、プラズマ正イオンの密度が n_0 になり、プラズマ電子の密度はほとんど0になる。そのとき、プラズマ・イオンには、正イオンからの電場 E_r^+ もはたらく。 E_r^+ は、a) と同様に、 $E_r^+ = \frac{en_0 r'}{2\epsilon_0}$ となるから、距離 r' の位置にできる電場 E_r は、

$$E_r = E_r^0 + E_r^+ = -\frac{enR^2}{2\epsilon_0 r'} + \frac{en_0 r'}{2\epsilon_0}$$

となる。

したがって、プラズマ・イオンにはたらく力は、

$$1 \text{ 価の正イオンに対して: } F_r^+ = eE_r = -\frac{e^2 n R^2}{2\epsilon_0 r'} + \frac{e^2 n_0 r'}{2\epsilon_0}$$

$$\text{電子に対して: } F_r^- = -eE_r = \frac{e^2 n R^2}{2\epsilon_0 r'} - \frac{e^2 n_0 r'}{2\epsilon_0}$$

f) 十分時間がたったとき、中心軸から距離 r の点には、電子線による電場と磁場の他、

1 価の正イオンによる電場 $E_r^+ = \frac{en_0 r}{2\epsilon_0}$ が生じているから、電子線の電子にはたらく力 F は、

$$F = f^e + (-e)E_r^+ = \frac{e^2 n r}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{e^2 n_0 r}{2\epsilon_0} \rightarrow -\frac{e^2 n_0 r}{2\epsilon_0}$$

よって、 $F < 0$ となり、電子線は自己集中線となることがわかる。

【解説】

アンペールの法則

1. アンペールの法則の積分形

図1のように、閉曲線Cで囲まれた面S内の任意の点を矢印の向きに貫く単位面積あたりの電流(これを電流密度という)を $\mathbf{j}$ 、C上の磁束密度を $\mathbf{B}$ とすると、真空の透磁率を μ_0 として、

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。これをアンペールの法則という。ここで、①式の左辺の値は、閉曲線Cの外側を流れる電流の値によらないことは注意すべきである。

①式の左辺の積分は、閉曲線Cに沿って $\mathbf{B}$ と矢印の向きの微小変位 $d\mathbf{l}$ の内積に関する1周の和を表し、線積分と呼ばれる。

右辺の積分変数 $d\mathbf{S}$ は、電流密度 $\mathbf{j}$ が貫く面S内の任意の点Pの近くの微小面に垂直で、図2の矢印の向きの大きさがその面積 dS に等しいベクトルである。いま、点Pで曲面Sに垂直な単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると、

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$$

と表される。したがって、点Pでの電流密度 $\mathbf{j}$ の面Sの法線成分を j_n とすると、

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j_n dS$$

となる。

①式右辺の積分 $\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ は、 $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ の面S全体の和、すなわち、面Sを貫く全電流を表し、面積積分と呼ばれる。

2. 「直線電流のつくる磁場」の一般化

上に述べた「アンペールの法則」は、高校物理でよく知られた「直線電流のつくる磁場」を一般化したものである。

無限に長い強さ I の直線電流から距離 r だけ離れた点には、電流の向きに進む右ねじの回る向きに強さ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \dots \textcircled{2}$$

の磁束密度ができる。これは実験結果として認めよう。いま、②式を、

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

と書くと、左辺は、磁束密度 B に、電流 I の位置を中心に電流に垂直な平面 S_0 内の半径 r の円周 C_0 の長さをかけたものに等しいことがわかる。

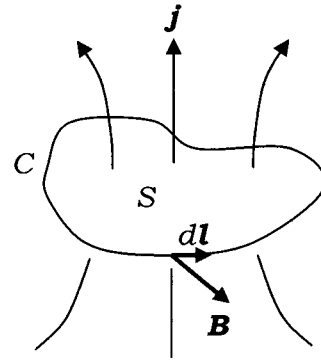


図1

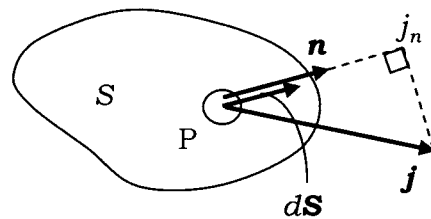


図2

1) 線積分、面積積分の具体的な計算方法にまで、ここでは立ち入らない。

平面 S_0 内に電流 I を囲む任意の閉曲線 C をとる。いま電流 I と平面 S_0 の交点を O , C_0 上の任意の点 P から微小な長さ Δl_0 の区間(これを線素という)をとり, 電流 I の位置からその区間を見込む角を $\Delta\theta$ とすると,

$$\Delta l_0 = r \Delta\theta$$

と書ける。閉曲線 C 上の点 Q を始点とした見込む角 $\Delta\theta$ の区間のベクトルを $\Delta \mathbf{l}$ (その長さを Δl とする。 $\Delta \mathbf{l}$ は線素ベクトルと呼ばれる), $\overline{OQ} = r'$ とすると, 点 O を中心に半径 r' の円周上で見込む角 $\Delta\theta$ の長さは, $\Delta l' = r' \Delta\theta$ となる。一方, 点 Q で電流 I による磁束密度のベクトルを $\mathbf{B}'$ (その強さを B') とし, $\mathbf{B}'$ と曲線 C のなす角を $\Delta\phi$ とすると, $\Delta l' = \Delta l \cos \Delta\phi$ となる(図 3)。

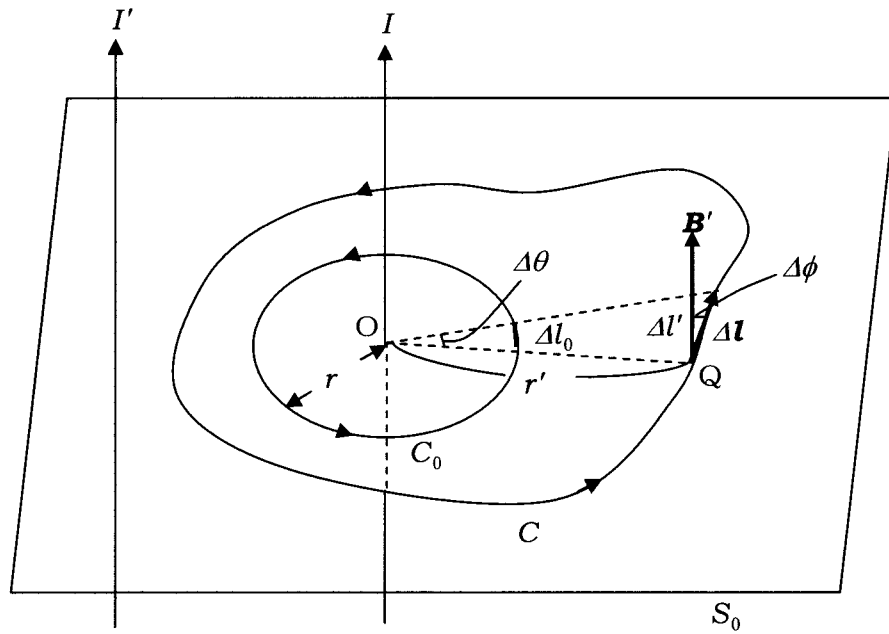


図 3

ここで, ②式と同様に $B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}$ と表されることと, $\Delta\theta$ の 1 周の和 $\sum \Delta\theta = 2\pi$ を用いると, 内積 $\mathbf{B}' \cdot \Delta \mathbf{l}$ の曲線 C に沿った 1 周の和は,

$$\sum \mathbf{B}' \cdot \Delta \mathbf{l} = \sum B' \Delta l' = \sum B' r' \Delta\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum \Delta\theta = \mu_0 I$$

よって, 一般に閉曲線 C 上の磁束密度を $\mathbf{B}$ とすると,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \dots \textcircled{3}$$

となることがわかる。すなわち, 「直線電流 I に垂直な平面内において, I を囲む任意の閉曲線 C 上の磁束密度 $\mathbf{B}$ と電流 I の間に, ③の関係式が成り立つ」。ここで, 閉曲線 C の外側を流れる電流 I' を考えると, $\sum \Delta\theta = 0$ であるから, C 内を貫く電流のみが③式の左辺に 0 でない寄与をすることがわかる。

ここまでは、電流 I に垂直な平面内の閉曲線を考えたが、この関係式③は、閉曲線 C が電流 I に垂直な平面内になくても全く同様に成り立つ。なぜならば、電流 I を囲む任意の閉曲線 C' 上の磁束密度 $\mathbf{B}$ と線素ベクトル $\Delta \mathbf{l}'$ に対して、 $\Delta \mathbf{l}'$ の I に垂直な平面 S_0 上への正射影を $\Delta \mathbf{l}$ 、 $\Delta \mathbf{l}$ を点 O から見込む角を $\Delta \theta$ とすれば(図4)、③式を得る計算がそのまま成り立つからである。

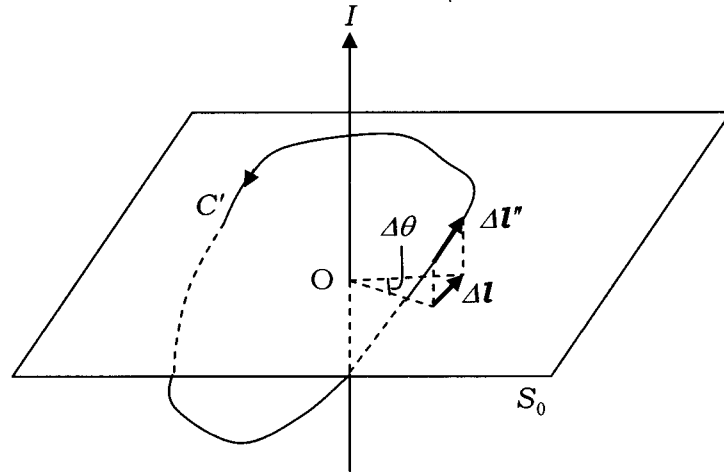


図4

直線電流 I を囲む任意の閉曲線 C に対して③式が成立すれば、閉曲線 C を固定して電流を変形しても、相対的に同じことであるから③式が成り立つはずである。こうして、閉曲線 C で囲まれた面 S を電流が1回だけ貫くのであれば、電流がどのような形状であっても同じ③式が成り立つ。

さらに、面 S を貫く電流が $I_1, I_2, \dots$ あれば、それぞれの電流がつくる磁束密度 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots$ について③式が成り立ち、電流と磁束密度の和についても③式が成り立つから、右辺の電流を面 S を貫くすべての電流に置き換えることができる。こうして、一般的に①式が成り立つことがわかる。

3. 軸対称な電流のつくる磁場

本問b)で考えたような、軸対称な電流、すなわち、電流密度が軸からの距離 r のみで決まる電流のつくる磁場を考えよう。

図5のように、 z 軸を中心に z 軸正方向へ流れる軸対称な電流を考え、軸から距離 a の点にできる磁束密度 $\mathbf{B}(a)$ を求める。軸から距離 r の点を流れる電流の密度を $j(r)$ とする。軸を中心とした半径 r と $r + \Delta r$ の円で挟まれた領域の電流密度は、 Δr を微小量とすると、一定値 $j(r)$ と考えられるから、この領域を貫いて流れる電流 ΔI は、

$$\Delta I = j(r) \cdot 2\pi r \Delta r$$

と表される。よって、軸を中心とした半径 a の円盤を貫く電流 $I(a)$ は、

$$I(a) = \sum \Delta I = 2\pi \sum j(r) r \Delta r = 2\pi \int_0^a j(r) r dr$$

と表される。ここで、電流密度が r によらない一定値 j であれば、

$$I(a) = 2\pi j \int_0^a r dr = \pi a^2 j$$

となる。

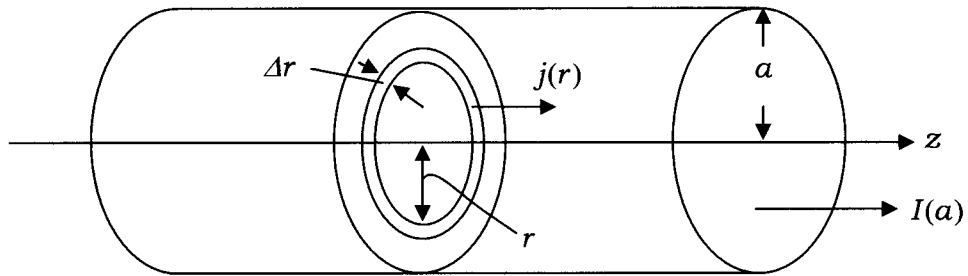


図 5

ここで、対称性より、半径 a の円周上で磁束密度の強さは一定で、その向きは電流の向きに進む右ねじの回る向きであることがわかるから、アンペールの法則①を用いれば、求める磁束密度の強さ B は、

$$B \cdot 2\pi a = \mu_0 I(a) \quad \therefore \quad B = \frac{\mu_0 I(a)}{2\pi a} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。④式は、 z 軸上を強さ $I(a)$ の直線電流が流れているとき、電流から距離 a の位置にできる磁束密度に等しいことを示している。また、半径 a の外側を流れる電流は、軸から距離 a の点にできる磁束密度に影響を与えない。