APhO2003(Salaya&Bangkok，Thailand)

理論第２問　　　　　　　　　光学的ジャイロスコープ

1913 年，ジョルジュ・サニャック(Georges Sagnac)(1869-1926)は，回転系に対するエーテルの相対速度を探す目的でリング状共鳴器を考案した。しかしながら，しばしば起こることであるが，サニャックの結果は，彼自身が予想もしなかった有益な結果をもたらした。その応用の１つが，最初にサニャックによって見出された単純な現象に基づかれた光ファイバー・ジャイロスコープ(FOG)である。サニャック効果と結び付いた FOG の物理的本質は，回転している光ファイバーのリングを反対方向へ回る２つの可干渉(コヒーレント)光の位相のずれにある。この位相のずれは，リングの角速度を決めるのにも用いられる。

図１に示された概略図のように，光波は，時計回りに角速度Ωで回転しているリングの点 P に入り，半径Rの円形の光ファイバー中を進む。光波は，点 P でリングに沿って時計回り(CW)と反時計回り(CCW)にまわる２波に分けられる。光ファイバー物質の屈折率はμである。光はファイバー・ケーブル中を半径Rの円形経路に沿ってなめらかに進むものとする。また，リングの円形軌道に沿った速さは，真空中の光速cに比べて十分小さい($(R\Omega)^2 << c^2$)とする。

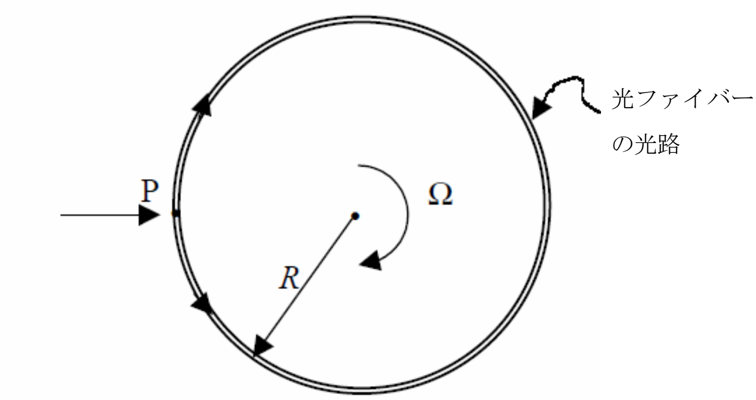


図１

a）光線が CW の向きに１周する時間をt^+, CCW の向きに１周する時間をt^-とするとき，それらの時間差$\Delta t = |t^+ - t^-|$を，円形リングで囲まれた領域の面積Aを用いて表せ。

b）回転しているリングに沿って１周する間，CW と CCW の光線の経路差ΔLを求めよ。

c）地球の自転を考慮したとき，半径$R = 1\text{m}$の円形光ファイバーでのΔLの最大値を求めよ。ただし，$\mu = 1.5$，$c = 3.0 \times 10^8\text{m}$とする。

d）設問ｂ)において，光ファイバー・コイルの巻数Nを増やすと測定値を増幅することができる。N回巻きの光ファイバーで測定される逆回りに回る２光線の位相差はどのように表されるか。ただし，ファイバー中を伝わる光の真空中での波長をλとする。

次に考える光学ジャイロスコープは，リング状レーザー・ジャイロスープである。これ

は図２に示されるように，レーザー装置を内蔵し，時計回りに角速度Ωで回転する周の長さLの正三角形リングからなる。レーザー光源は，増幅された２波の可干渉光を反対方向に発する。*この三角形リング状共鳴器のリングの周の長さは，レーザー光の振動を保持するために，レーザー光の波長λの整数倍に等しくなっている。*リングに挿入された付加的な装置エタロンは，リング共鳴器において，望まない振動数モードを減衰させるはたらきをする。

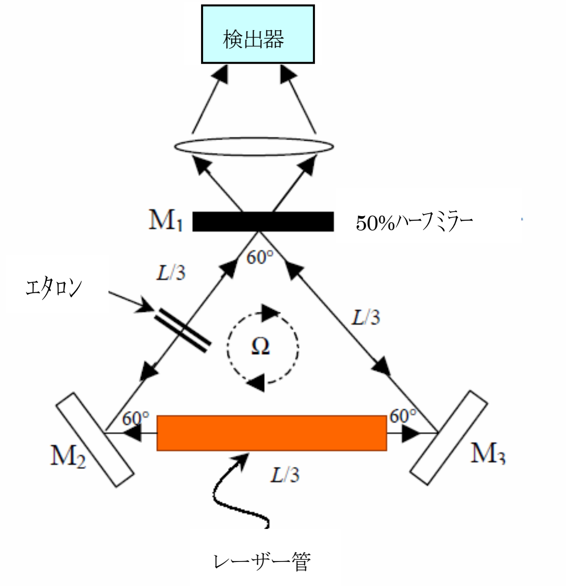


図２：リング状レーザー・ジャイロスコープの概念図

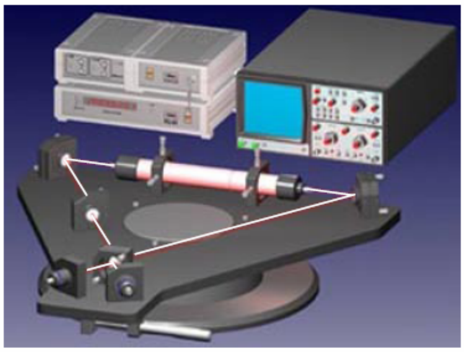


図３：この問題で議論されるリング状レーザー・ジャイロスコープの実例

e）図２に示されたような三角形リングの場合，時計回りと反時計回りに１周する光の時間差Δtを求めよ。答は，リングで囲まれた領域の面積Aを用いて表せ。また，この結果は円形リングの場合と同等であることを示せ。

f）図２に示されるように，リングが角速度Ωで回転しているとき，CW と CCW で測定される振動数には差がある。CW と CCW で測定される光線の振動数の差$\Delta \nu$をL，Ω，λを用いて求めよ。

APhO2003(Salaya&Bangkok，Thailand)

理論第２問　【解答】

光学的ジャイロスコープ

実験室系に対して静止している屈折率μのファイバー中の光の速さは$c'=\dfrac{c}{\mu}$，その波長は$\lambda'=\dfrac{\lambda}{\mu}$（$\lambda$：真空中での波長)で与えられる。

a）実験室系で考える。

光線 CW が角速度Ωで時計回りに回転している半径Rのリングを時間t^+で１周するとき，時間t^+の間にリングは円周に沿って距離$R\Omega t^+$だけ回転しているから，光は，$2\pi R+R\Omega t^+$だけ進む。よって，

$$c't^+=2\pi R+R\Omega t^+ \quad \therefore \quad t^+=\frac{2\pi R}{c'-R\Omega}$$

同様に，光線 CCW が１周する時間t^-は,

$$c't^-=2\pi R-R\Omega t^- \quad \therefore \quad t^-=\frac{2\pi R}{c'+R\Omega}$$

これより，求める時間差Δtは，$A=\pi R^2$であるから,

$$\Delta t=t^+-t^-=\frac{4\pi R^2\Omega}{c'^2-R^2\Omega^2}\fallingdotseq\frac{4A\Omega}{c'^2}=\underline{\frac{4\mu^2A\Omega}{c^2}} \qquad \cdots①$$

b）リングを１周する間の経路差ΔLは,

$$\Delta L=c'\Delta t=\underline{\frac{4\mu A\Omega}{c}}$$

c）リングがその中心を通る面に垂直な回転軸のまわりに地球の自転の角速度で１周するとき，経路差ΔLは最大になるから，$\Omega=\dfrac{2\pi}{24\times60\times60}\fallingdotseq7.27\times10^{-5}$ rad/s より,

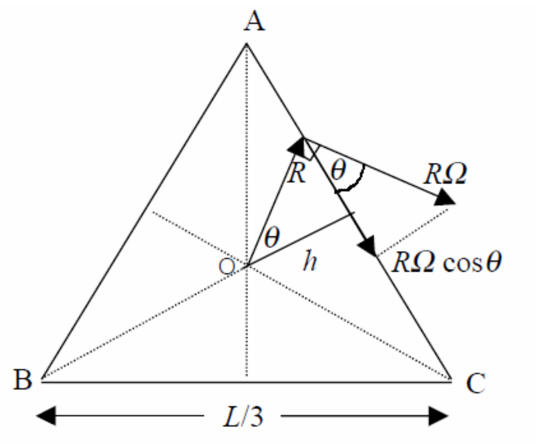
$$\Delta L=\frac{4\times1.5\times3.14\times1^2\times7.27\times10^{-5}}{3.0\times10^8}=4.57\times10^{-12}\fallingdotseq\underline{4.6\times10^{-12}\ \mathrm{m}}$$

d）N回巻きの光ファイバーで，逆回り２光線の位相差$\Delta\theta$は,

$$\Delta\theta=2\pi\frac{N\Delta L}{\lambda'}=\underline{\frac{8\pi\mu^2AN\Omega}{c\lambda}}$$

e）回転する三角形リング上での光速を考える。中心 O のまわりに角速度Ωで回転している三角形リングの辺 AC 上での光速$c_\pm$は，CW と CCW それぞれの場合，下図より，

$$c_\pm = c \mp R\Omega\cos\theta = c \mp \Omega h$$



いま，hは図に示された値で，三角形の辺上の位置によらない一定値である。したがって，CW と CCW のそれぞれの場合，三角形リング上を 1 周する時間は,

$$t_\pm = \frac{L}{c_\pm} = \frac{L}{c \mp \Omega h}$$

よって，時間差Δtは,

$$\Delta t = t_+ - t_- = \frac{L}{c - \Omega h} - \frac{L}{c + \Omega h}$$

$$= \frac{2Lh\Omega}{c^2 - (\Omega h)^2} \fallingdotseq \underline{\frac{4A\Omega}{c^2}} \qquad \cdots②$$

ここで，三角形の面積$A = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{L}{3} \times h\right) = \frac{1}{2}Lh$を用いた。

②式は，$c \to c' = \dfrac{c}{\mu}$とすると①式に一致し，三角形リングも円形リングも同等であることが示された。

f）リング状共鳴器での共鳴振動数を求めるには，次式で定義される CW と CCW の場合の三角形の周の長さ$L_\pm$を用いるのが便利である。

$$L_+ = ct_+ = \frac{L}{1 - \dfrac{\Omega h}{c}}, \quad L_- = ct_- = \frac{L}{1 + \dfrac{\Omega h}{c}}$$

振動を保持するレーザー光の振動数$\nu_\pm$は，$c = \nu_\pm \lambda_\pm$と整数mを用いて,

$$L_\pm = m\lambda_\pm = m\frac{c}{\nu_\pm} \quad \therefore \quad \nu_\pm = m\frac{c}{L_\pm}$$

となる。これより，求める振動数の差$\Delta\nu$は,

$$\Delta\nu = \nu_- - \nu_+ = mc\left(\frac{1+\dfrac{\Omega h}{c}}{L} - \frac{1-\dfrac{\Omega h}{c}}{L}\right) = m\frac{2\Omega h}{L}$$

ここで，$L^2 \fallingdotseq L_+ L_- = m^2 \lambda_+ \lambda_- \fallingdotseq m^2 \lambda^2 \quad \therefore \quad m \fallingdotseq \dfrac{L}{\lambda}$

また，正三角形の面積Aは,

$$\frac{1}{2}\frac{L}{3}h \times 3 = A$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{L}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{L^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad h = \frac{1}{2}\frac{L}{3\sqrt{3}}$$

よって,

$$\underline{\Delta\nu = \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{L}{\lambda}\Omega}$$