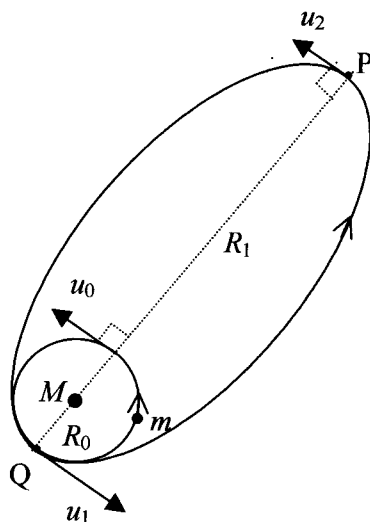


理論第1問

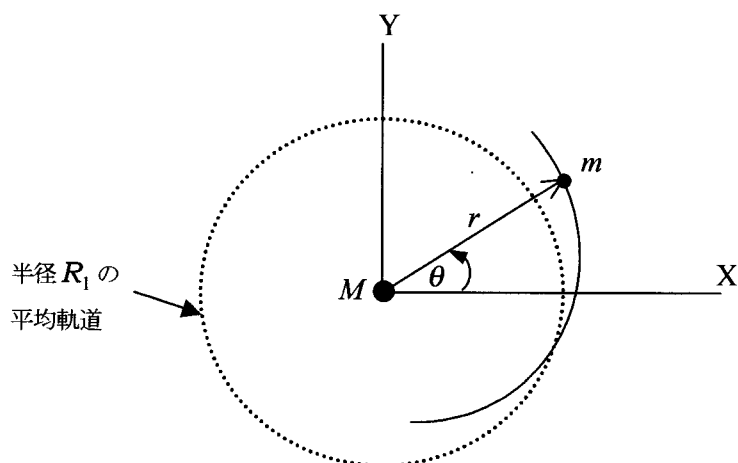
人工衛星の軌道修正

近い将来, 我々自身人工衛星の打ち上げに参加するかもしれない。そこにおいては, 単純な力学のみが使われる。



- a) いま, 質量 m の人工衛星が質量 M の地球のまわりを半径 R_0 の円運動をしている。衛星の速さ u_0 を, M , R_0 と万有引力定数 G を用いて求めよ。
- b) 円軌道上の点 Q において, 人工衛星の速さを瞬間的に u_0 から u_1 へ加速して地球の中心から R_1 だけ離れた遠地点 P を通る軌道にのせたい。速さ u_1 を u_0 , R_0 , R_1 を用いて求めよ。
- c) 衛星を地球の引力圏外に去らせるのに必要な u_1 の最小値を u_0 を用いて求めよ。
- d) 設問 b)において, 遠地点 P における衛星の速さ u_2 を, u_0 , R_0 , R_1 を用いて求めよ。
- e) さて点 P において, 衛星の速さを u_2 から u_3 へ瞬間的に変化させることにより, 衛星を半径 R_1 の円軌道にのせたい。 u_3 の大きさを u_2 , R_0 , R_1 を用いて求めよ。

- f) 半径 R_1 の完全な円軌道をまわる人工衛星に、半径方向へ瞬間的にわずかな摂動(力)を加える。このとき、地球の中心から衛星までの距離 r は平均距離 R_1 のまわりに振動する。この振動の周期 T を求めよ。



ヒント：必要ならば、極座標で表された人工衛星の運動方程式：

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right\} = -G \frac{Mm}{r^2} \quad \dots(1)$$

と角運動量保存則：

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = C = \text{一定} \quad \dots(2)$$

を用いてもよい。

- g) 摂動を加えられた衛星軌道の概略図を、摂動を加えられる前の円軌道と共に描け。

理論第1問 【解答】

人工衛星の軌道修正

a) 人工衛星に関する円運動の運動方程式より,

$$m \frac{u_0^2}{R_0} = G \frac{Mm}{R_0^2} \quad \therefore \quad u_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

b) 人工衛星の点 Q から点 P までの楕円軌道上の運動に関して,
角運動量保存則:

$$mu_1 R_0 = mu_2 R_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

力学的エネルギー保存則: $\frac{1}{2} mu_1^2 - \frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2} mu_2^2 - \frac{GMm}{R_1}$

これらより u_2 を消去して,

$$\left\{ \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 - 1 \right\} u_1^2 = \frac{2GM}{R_0} \left(\frac{R_0}{R_1} - 1 \right)$$

$$\therefore u_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \sqrt{\frac{2R_1}{R_0 + R_1}} = u_0 \sqrt{\frac{2R_1}{R_0 + R_1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

c) ②式において, $R_1 \rightarrow \infty$ として, 衛星を引力圏外へ去らせる u_1 の最小値は,

$$u_1^{(\infty)} = \sqrt{2} u_0$$

d) ①, ②式より,

$$u_2 = \frac{R_0}{R_1} u_1 = \frac{\sqrt{2} R_0}{\sqrt{R_1(R_0 + R_1)}} u_0 \quad \dots \textcircled{3}$$

e) 設問 a) と同様にして, $u_3 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = u_0 \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \quad \dots \textcircled{4}$

$$\text{ここで, ③式を用いて, } u_3 = \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \frac{\sqrt{R_1(R_0 + R_1)}}{\sqrt{2} R_0} u_2 = u_2 \sqrt{\frac{R_0 + R_1}{2R_0}}$$

f) ここでは, 簡略化した記号 $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ を用いることにする。

(2) 式より, $\dot{\theta}$ が $\dot{\theta} = \frac{C}{mr^2}$ と表されるから, $r\dot{\theta}^2 = r \left(\frac{C}{mr^2} \right)^2 = \frac{(C/m)^2}{r^3}$ となる。よつ

て, これを(1)式へ代入して, 運動方程式は,

$$\ddot{r} - \frac{(C/m)^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。

人工衛星には半径方向へ摂動(中心力)を加えるから, 衛星の角運動量は摂動を加える前後で変化しない。よつて, 摂動を加えた後の衛星の角運動量は, 半径 R_1 で円運動して

いるときの値 $C = mR_1^2 \dot{\theta}$ に等しい。円運動の運動方程式より,

$$mR_1\dot{\theta}^2 = G \frac{Mm}{R_1^2} \quad \therefore \quad \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{R_1^3}$$

よって $\left(\frac{C}{m}\right)^2 = (R_1^2\dot{\theta})^2 = GMR_1$ となるから、これを⑤式へ代入し、

$$\ddot{r} - \frac{GMR_1}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

を得る。ここで、 $r = R_1 + \eta$ ($\eta \ll R_1$) とおくと、

$$\ddot{\eta} - \frac{GMR_1}{R_1^3 \left(1 + \frac{\eta}{R_1}\right)^3} = -\frac{GM}{R_1^2 \left(1 + \frac{\eta}{R_1}\right)^2}$$

$$\therefore \ddot{\eta} - \frac{GM}{R_1^2} \left(1 - 3\frac{\eta}{R_1}\right) = -\frac{GM}{R_1^2} \left(1 - 2\frac{\eta}{R_1}\right)$$

となる。これより、 η に関する単振動の運動方程式

$$\ddot{\eta} = -\frac{GM}{R_1^3} \eta \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。

⑥式は、衛星が半径方向へ、 $\eta = 0$ ($r = R_1$) を中心に、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R_1^3}}$ の単振動を

することを表している。これより、その周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

(別解)

周期 T は、上で計算したような定量的な軌道計算をしなくても、次のように、ケプラーの第3法則を用いると簡単に求めることができる。

円運動している人工衛星が微小な摂動を受けた後、その軌道は地球の中心を1つの焦点とする楕円軌道に移るはずであり、その長半径(長軸の長さの半分) a は、ほぼ元の円軌道の半径 R_1 に等しくなる。この場合、地球の中心と衛星までの距離 r が R_1 のまわりに1回振動する間に、衛星は楕円軌道を1周するから、求める周期 T は、楕円運動の周期に等しい。

衛星が等速円運動しているときの周期 T_0 は、④式および u_0 の値(a)の結果を用いて、

$$T_0 = \frac{2\pi R_1}{u_3} = 2\pi R_1 \sqrt{\frac{R_1}{GM}}$$

また、ケプラーの第3法則より、

$$\frac{T_0^2}{R_1^3} = \frac{T^2}{a^3}$$

よって、 $a \doteq R_1$ より、 $T \doteq T_0 = \underline{2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}}$

g) 摂動を受けた後の人工衛星の軌道は、長半径 R_1 の楕円軌道であるから、それは下図のようになる。

