

理論第3問

傾いた道路上を動く重い車

図3-1に示すように、傾斜角 θ の傾いた道路上に円筒状の前輪と後輪を有する重い車(道路ローラー)がある。各円筒状車輪の質量は $M(=m_2=m_3)$ であり、各車輪は、外半径 R_0 、内半径 $R_i(=\frac{4}{5}R_0)$ の円筒状の殻(質量は $\frac{4}{5}M$)と8本のスポーク(細い棒、8本の全質量は $\frac{M}{5}$)からできている。円筒状車輪は、模式的に図3-2のように描かれる。車は重力と摩擦を受けて道路の下方へ動いている。前輪と後輪は、車の中心に対して対称な位置に取り付けられている。車輪と道路の間の静止摩擦係数および動摩擦係数は、それぞれ μ_s と μ_k である。車体の質量は $5M(=m_1)$ で長さは L 、厚さは t である。前輪と後輪の間の長さは $2l$ で、車輪の中心から車体の底面までの長さは h である。車輪とその軸の間の回転摩擦は無視できるものとする。

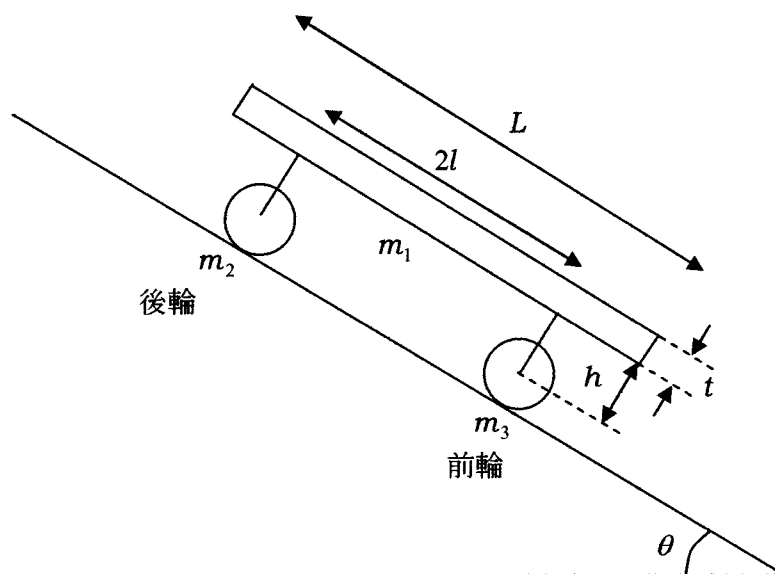


図3-1

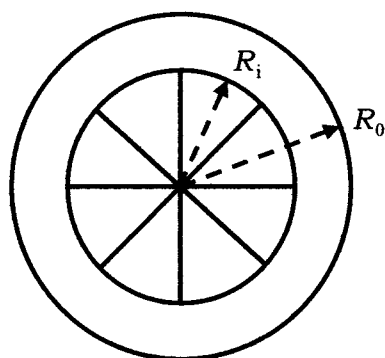


図3-2

1. 各円筒状車輪の慣性モーメントを求めよ。
2. 車体、前輪、後輪に作用する力を図示し、それぞれの運動方程式を書き下せ。ただし、必要な力や加速度などの物理量は定義して用いること。
3. 車は静止状態から自由に動き出すとして、系の運動のすべての可能なタイプを述べ、そのような運動が起こるための傾斜角 θ に対する条件を、与えられた物理量を用いて表せ。また、そのときの車の加速度の式を導け。
4. 車は静止状態から車輪の回転のみで距離 d だけ動いた後、静止摩擦係数および動摩擦係数がより小さな値 μ_s および μ_k の道路面に入り、2つの車輪が滑り始めたとする。車が全体で距離 s だけ動いた後の車の速さと車輪の角速度を求めよ。ここで、 d と s は、車の大きさに比べて十分大きいものとする。

(原文にない訳者による注)

1. 剛体の回転運動方程式 (高校課程で習わない内容)

図3-3のように、剛体の軸Oのまわりに力のモーメント N がはたらき、剛体が角加速度 α で回転するとき、回転運動方程式

$$I\alpha = N$$

が成り立つ。 I は、軸Oのまわりの慣性モーメントと呼ばれ、軸Oから剛体内の質点 i の質量を m_i 、軸Oから質点 i までの距離を r_i とすると、 I

$$I = \sum m_i r_i^2$$

で与えられる。ここで、質量が連続的に分布してい

るとすれば、 $\sum \rightarrow \int$, $m_i \rightarrow dm$ として、

$$I = \int r^2 dm$$

となる。

2. 答の数式に含まれる分数や無理数は有効数字2桁の小数に直せ。

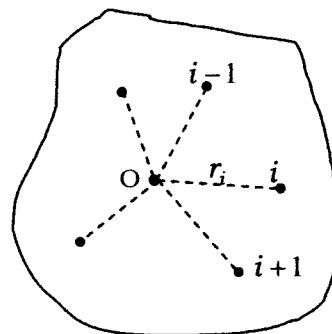


図3-3

理論第3問【解答】

傾いた道路上を動く重い車

以下で、計算を簡単化するために、 $h_1 = h + \frac{1}{2}t$ および $R = R_0$ を用いる。

$$1. \quad R_i = \frac{4}{5}R, \text{ 車輪の殻の部分の質量 } m_{sh} = \frac{4}{5}M, \text{ 各スポークの質量 } m_{sp} = \frac{M/5}{8} = \frac{1}{40}M$$

を用いて車輪の慣性モーメント $I = I_{shell} + 8I_{spoke}$ を計算する。

車輪の殻の部分の質量面密度(円筒断面の単位面積あたりの質量)を σ として、殻部分の慣性モーメント I_{shell} は、

$$I_{shell} = \int r^2 dm = \int_{R_i}^{R_0} r^2 \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_{R_i}^{R_0} r^3 dr = \frac{\pi\sigma}{2}(R_0^4 - R_i^4)$$

となる。ここで、 $m_{sh} = \sigma \cdot \pi(R_0^2 - R_i^2)$ を用いて、

$$I_{shell} = \frac{m_{sh}}{2}(R_0^2 + R_i^2) = 0.656MR^2$$

スポークの線密度(単位長さあたりの質量)を λ として、1本のスポークの慣性モーメント I_{spoke} は、

$$I_{spoke} = \int r^2 dm = \int_0^{R_i} r^2 \lambda dr = \frac{1}{3}\lambda R_i^3$$

となる。ここで、 $m_{sp} = \lambda R_i$ を用いて、

$$I_{spoke} = \frac{1}{3}m_{sp}R_i^2 = 0.00533MR^2$$

これらより、車輪全体の慣性モーメント I は、

$$I = 0.656MR^2 + 8 \times 0.00533MR^2 \doteq \underline{\underline{0.70MR^2}}$$

2. 各部分に作用する力と運動方程式

(i) 車体

図3-aのように、車体には、重力 m_1g 、後輪から斜面に平行上向きの力 f_{12h} 、斜面に垂直方向上向きの力 N_{12} が、前輪から同様に、力 f_{13h} 、 N_{13} がはたらく。

斜面に平行な方向について、斜面に沿って下向きの加速度を a として、運動方程式は、

$$m_1a = m_1g \sin \theta - f_{12h} - f_{13h} \quad \dots(1)$$

斜面垂直方向の力のつり合いは、

$$0 = N_{12} + N_{13} - m_1g \cos \theta \quad \dots(2)$$

車体の中点Oのまわりのモーメントのつり合いは、

$$0 = N_{13}l - N_{12}l - f_{12h}h_1 - f_{13h}h_1 \quad \dots(3)$$

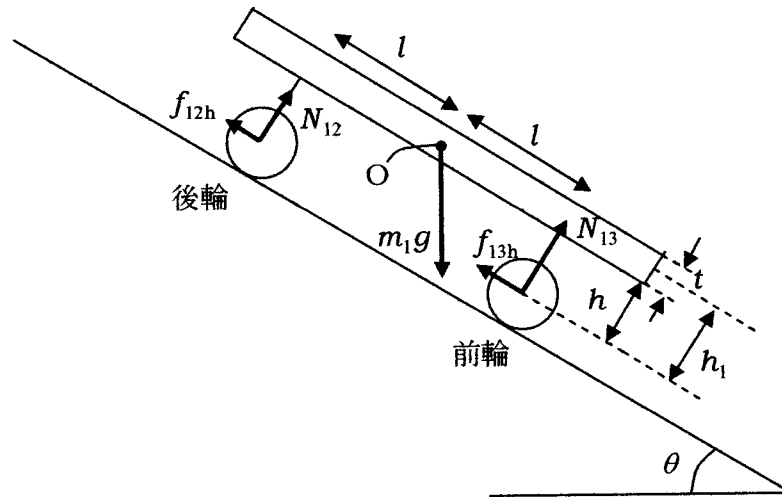


図 3 - a

(ii) 後輪

図 3 - b のように、後輪には、重力 m_2g 、車体から斜面に平行下向きの力 $f_{21h}(=f_{12h})$ 、斜面に垂直下向きの力 $N_{21}(=N_{12})$ 、地面から斜面に平行上向きの力 f_2 、斜面に垂直上向きの力 N_2 がはたらく。

斜面に平行な方向の運動方程式は、

$$m_2a = m_2g \sin \theta + f_{21h} - f_2 \quad \dots(4)$$

斜面垂直方向の力のつり合いは、

$$0 = N_2 - N_{21} - m_2g \cos \theta \quad \dots(5)$$

回転の角加速度を α_2 として、車輪の回転運動方程式は、

$$I\alpha_2 = f_2R \quad \dots(6)$$

車輪が滑らずに転がる時、 $R\alpha_2 = a$ であり、滑りながら転がる時、 $R\alpha_2 < a$ である。また、車輪が滑らないとき、 $f_2 \leq \mu_s N_2$ であり、滑っているとき、

$$f_2 = \mu_k N_2 \quad \dots(7)$$

となる。

(iii) 前輪

図 3 - c のように、前輪には、重力 m_3g 、車体から斜面に平行下向きの力 $f_{31h}(=f_{13h})$ 、斜面に垂直下向きの力 $N_{31}(=N_{13})$ 、地面から斜面に平行上向きの力 f_3 、斜面に垂直上向きの力 N_3 がはたらく。

斜面に平行な方向の運動方程式は、

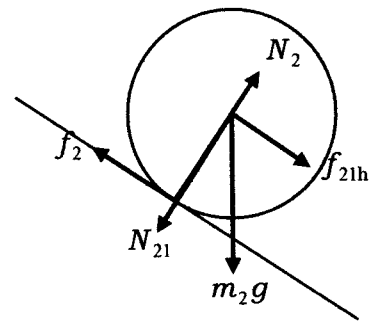


図 3 - b

$$m_3 a = m_3 g \sin \theta + f_{31h} - f_3 \quad \cdots(8)$$

斜面垂直方向の力のつり合いは,

$$0 = N_3 - N_{31} - m_3 g \cos \theta \quad \cdots(9)$$

回転の角加速度を α_3 として, 車輪の回転運動方程式は,

$$I \alpha_3 = f_3 R \quad \cdots(10)$$

車輪が滑らずに転がる時, $R \alpha_3 = a$ であり, 滑りながら転がる時, $R \alpha_3 < a$ である。また, 車輪が滑らないとき, $f_3 \leq \mu_s N_3$ であり, 滑っているとき,

$$f_3 = \mu_k N_3 \quad \cdots(11)$$

となる。

3. (i) 前輪, 後輪共に滑らずに転がる場合

(6)式より, $f_2 = \frac{I}{R} \alpha_2 = \frac{I}{R^2} a$ となることを用いて, (4)式($m_2 = M$)より,

$$f_{21h} = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a - Mg \sin \theta \quad \cdots(12)$$

同様に, $m_3 = M$ を用いて, (8),(10)式より,

$$f_{31h} = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a - Mg \sin \theta \quad \cdots(13)$$

(12),(13)式を(1)式へ代入して $m_1 = 5M$ を用いると,

$$\left(7M + \frac{2I}{R^2} \right) a = 7Mg \sin \theta$$

$I = 0.70MR^2$ を代入して, 車の加速度 a は,

$$a = \frac{7Mg \sin \theta}{7M + \frac{2 \times 0.70MR^2}{R^2}} = \frac{5}{6} g \sin \theta \doteq \underline{0.83g \sin \theta} \quad \cdots(14)$$

(2),(3)式より N_{13} を消去して(12),(13)式を用いると,

$$\begin{aligned} N_{12} &= \frac{1}{2} m_1 g \cos \theta - \frac{1}{2} (f_{12h} + f_{13h}) \frac{h_1}{l} \\ &= \frac{5}{2} Mg \cos \theta - \left\{ \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a - Mg \sin \theta \right\} \frac{h_1}{l} \end{aligned}$$

これを(5)式へ代入して,

$$\begin{aligned} N_2 &= N_{12} + Mg \cos \theta \\ &= \frac{7}{2} Mg \cos \theta - \left\{ (M + 0.70M) \times \frac{5}{6} g \sin \theta - Mg \sin \theta \right\} \frac{h_1}{l} \\ &= \frac{7}{2} Mg \cos \theta - \frac{5h_1}{12l} Mg \sin \theta \end{aligned}$$

同様に,

$$N_3 = \frac{7}{2} Mg \cos \theta + \frac{5h_1}{12l} Mg \sin \theta$$

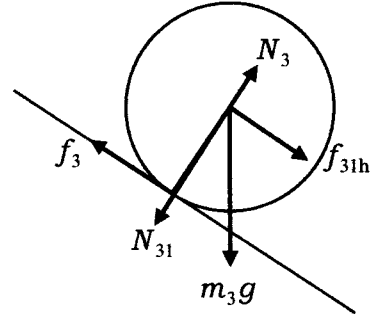


図 3 - c

ここで、車輪が滑らない条件

$$f_2 \leq \mu_s N_2 \quad \text{かつ} \quad f_3 \leq \mu_s N_3$$

へ代入して、

$$\frac{I}{R^2} a \leq \mu_s \left(\frac{7}{2} Mg \cos \theta - \frac{5h_1}{12l} Mg \sin \theta \right)$$

かつ

$$\frac{I}{R^2} a \leq \mu_s \left(\frac{7}{2} Mg \cos \theta + \frac{5h_1}{12l} Mg \sin \theta \right)$$

さらに、 $I = 0.70MR^2$ を代入して、

$$\tan \theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.58 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}} \quad \text{かつ} \quad \tan \theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.58 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}$$

これより求める θ に対する条件は、

$$\tan \theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.58 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}} \quad \dots(15)$$

(注) (15)式の右辺は、 $\frac{42\mu_s}{7 + 5\mu_s \frac{h_1}{l}}$ としてもよい。

(ii) 前輪、後輪共に滑りながら転がる場合

(7)式を(4)式に代入して、

$$f_{12h} = f_{21h} = Ma + \mu_k N_2 - Mg \sin \theta \quad \dots(16)$$

(11)式を(8)式へ代入して、

$$f_{13h} = f_{31h} = Ma + \mu_k N_3 - Mg \sin \theta \quad \dots(17)$$

(16),(17)式を(1)式へ代入し、 $m_1 = 5M$ より、

$$a = g \sin \theta - \frac{\mu_k (N_2 + N_3)}{7M} \quad \dots(18)$$

(2),(5),(9)式より、 N_{12} と N_{13} を消去して

$$N_2 + N_3 = 7Mg \cos \theta \quad \dots(19)$$

(18),(19)式より、

$$a = \underline{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

両輪共に滑る条件は、3(i)より、

$$\tan \theta > \frac{3.5\mu_s}{0.58 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}} \quad \text{かつ} \quad \tan \theta > \frac{3.5\mu_s}{0.58 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}$$

これより、求める θ に対する条件は、

$$\tan \theta > \frac{3.5\mu_s}{0.58 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}} \quad \dots(20)$$

(iii) 前輪が滑らずに転がり、後輪が滑りながら転がる場合

(7)式を(4)式へ代入して,

$$f_{12h} = f_{21h} = Ma + \mu_k N_2 - Mg \sin \theta \quad \dots(21)$$

(10)式より, $f_3 = \frac{I}{R} \alpha_3 = \frac{I}{R^2} a$ となることを用いて, (8)式($m_3 = M$)より,

$$f_{13h} = f_{31h} = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a - Mg \sin \theta \quad \dots(22)$$

(21),(22)式を(1)式へ代入し, $m_1 = 5M$, $I \approx 0.70MR^2$ を代入して,

$$a = \frac{7Mg \sin \theta - \mu_k N_2}{7.7M} \quad \dots(23)$$

(3),(5),(9)式より $N_{12} = N_{21}$, $N_{13} = N_{31}$ を消去し, (21),(22)式を代入すると,

$$N_3 - N_2 = \left\{ \mu_k N_2 + \left(2M + \frac{I}{R^2} \right) a - 2Mg \sin \theta \right\} \frac{h_1}{l} \quad \dots(24)$$

を得る。(23)式を(24)式へ代入し, $I = 0.70MR^2$ を代入すると,

$$N_3 - N_2 \left(1 + \frac{50}{77} \mu_k \frac{h_1}{l} \right) = \frac{5h_1}{11l} Mg \sin \theta$$

これと(19)式より, N_3 を消去して,

$$N_2 = \frac{7Mg \cos \theta - \frac{5h_1}{11l} Mg \sin \theta}{2 + \frac{50}{77} \mu_k \frac{h_1}{l}} \quad \dots(25)$$

(25)式を(23)式へ代入して, 求める加速度 a は,

$$a = g \left(0.91 \sin \theta - \frac{\mu_k}{7.7} \frac{7 \cos \theta - 0.45 \frac{h_1}{l} \sin \theta}{2 + 0.65 \mu_k \frac{h_1}{l}} \right) \quad \dots(26)$$

前輪が滑らずに転がり, 後輪が滑りながら転がる条件は,

$$\frac{3.5\mu_s}{0.58 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}} < \tan \theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.58 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}$$

4. 車が静止状態から車輪の回転のみで距離 d だけ動くのにかかる時間を t_1 , そのときの車の速さを v_1 , 車輪の回転の角速度を ω_1 とする。

前問 3 の (i) で求めた加速度を $a_1 = \frac{5}{6} g \sin \theta$ とすると, 等加速度運動の式より,

$$v_1^2 - 0^2 = 2a_1 d \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{2a_1 d} = \sqrt{\frac{5}{3} g d \sin \theta} \quad \dots(27)$$

車輪の角速度 ω_1 は,

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{5}{3} g d \sin \theta} \quad \dots(28)$$

(注) ここで、車の力学的エネルギー保存則を確かめておこう。

車が距離 d だけ動いたときの運動エネルギーと車輪の回転エネルギーの和 K は、

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 \times 2$$

ここで、 $m_1 + m_2 + m_3 = 7M$ 、 $v_1^2 = \frac{5}{3}gd \sin \theta$ 、 $I = 0.70MR^2$ 、 $\omega_1^2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{5}{3}gd \sin \theta$

を代入すると、

$$K = 7Mgd \sin \theta = (m_1 + m_2 + m_3)gd \sin \theta$$

となる。これは車全体の重力の位置エネルギーの減少であり、力学的エネルギー保存則が成立していることを示している。(注終)

車輪が斜面を滑り出してから車が全体で距離 s だけ動くまでの時間を t_2 、そのときの速さを v_2 とする。前問 3 の(ii)で求めた加速度を $a_2 = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ とすると、等加速度運動の式より、

$$s - d = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \quad \therefore \quad t_2 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2(s-d)}}{a_2}$$

また、

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_2(s-d)$$

$$\therefore \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_2(s-d)} = \sqrt{\{(2s - 0.33d) \sin \theta - 2\mu_k(s-d) \cos \theta\}g}$$

いま、車輪に斜面からはたらく垂直抗力を N とすると、車輪にはたらく動摩擦力 $\mu_k N$ が軸のまわりのモーメント $\mu_k NR$ を与えるから、車輪の回転運動方程式は、角加速度を α として、

$$I\alpha = \mu_k NR \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\mu_k NR}{I}$$

これより、求める車輪の角速度 ω_2 は、

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t_2 = \frac{1}{R} \sqrt{1.7gd \sin \theta} + \frac{\mu_k NR}{I} t_2$$

ここで、垂直抗力 N は、前輪と後輪で異なる。したがって、回転の角速度 ω_2 も異なる。後輪にはたらく垂直抗力を N_2 、前輪にはたらく垂直抗力を N_3 とすると、(24)式の右辺で、 $\frac{I}{R^2} a \rightarrow \mu_k N_3$ として、

$$N_3 - N_2 = \left\{ \mu_k (N_2 + N_3) + 2Ma_2 - 2Mg \sin \theta \right\} \frac{h_1}{l}$$

さらに、 $a_2 = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ を代入して、

$$\left(1 + \mu_k \frac{h_1}{l} \right) N_2 - \left(1 - \mu_k \frac{h_1}{l} \right) N_3 = 2\mu_k \frac{h_1}{l} Mg \cos \theta \quad (29)$$

得る。(19)式と(29)式より、

$$N_2 = \left(3.5 - 2.5\mu_k \frac{h_1}{l} \right) Mg \cos \theta$$

$$N_3 = \left(3.5 + 2.5\mu_k \frac{h_1}{l} \right) Mg \cos \theta$$

となる。