

理論第 2 問

電気信号の感知

ある海洋動物は、いづらか離れたところにいる動物が呼吸や筋肉を収縮させるなどの過程で生じさせる電流を感知することによって、それらの動物をを認知する能力をもっている。ある捕食動物は砂の中に埋まっているときでさえ、獲物の位置を特定するのにこの電気信号を用いる。

獲物での電流生成と捕食動物による感知の物理的機構は、図 2-1 に示すようなモデル化をすることができる。獲物によって生成される電流は、獲物の体内にある正負の電位をもつ 2 球の間を流れる。半径  $r_s$  の 2 球の中心間の距離は  $l_s$  であり、 $r_s$  は  $l_s$  より十分に小さいとする。海水の電気抵抗率は  $\rho$  である。いま、獲物の体の電気抵抗は周囲の海水のものに等しいとする。このことは、図に描かれている獲物の周囲の境界線は無視できることを意味する。

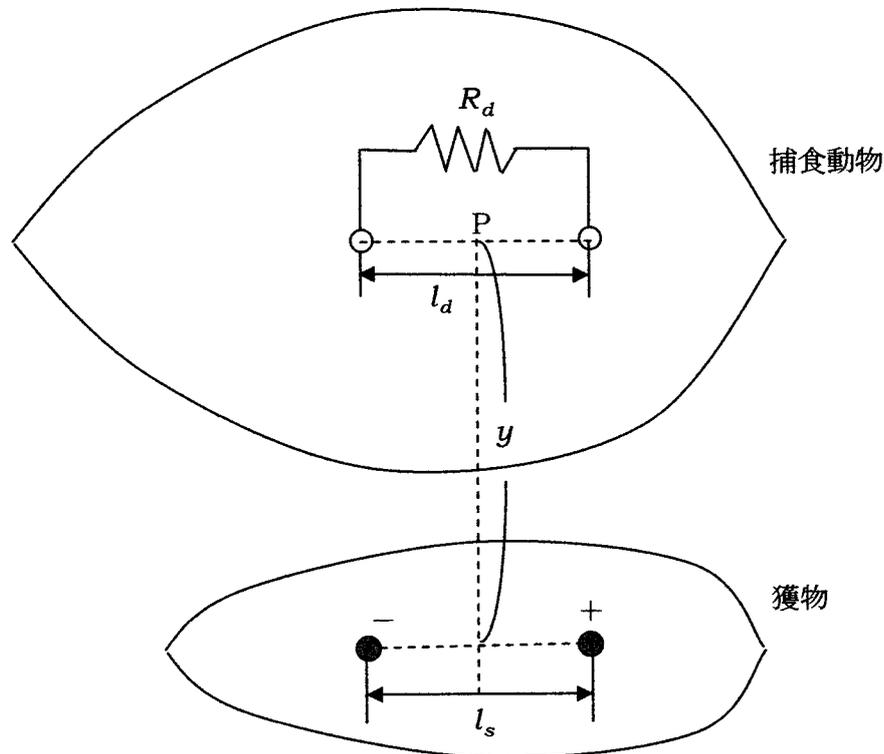


図 2-1

獲物から発せられた電力の捕食動物による検出機構を、獲物の場合と同様に、捕食動物の体内に 2 球をとってモデル化する。これら 2 球は獲物の体内の 2 球と平行に位置し、周囲の海水に接触している。半径  $r_d$  の 2 球の中心間の距離は  $l_d$  であり、 $r_d$  は  $l_d$  より十分に小さいとする。この場合、検出器の中心 P は発信器(獲物の 2 球間の中点)の真上、距離  $y$  の位置にあり、検出器と発信器の 2 球間の電場は 2 球を結ぶ直線と平行であるとする。2 球

を結ぶ直線に沿った電場は時間的に変化しない。 $l_s$ と $l_d$ は共に $y$ より十分に小さいとする。

検出器は、図2-2に示すように、獲物、周囲の海水と捕食動物を結ぶ閉回路を形成する。

図2-2において、 $V$ は、獲物によって生み出される電場による検出器の2球間の電圧であり、 $R_m$ は、周囲の海水による内部抵抗である。さらに $R_d$ と $V_d$ は、それぞれ捕食動物内の検出器の抵抗と実際に検出される2球間の電圧である。

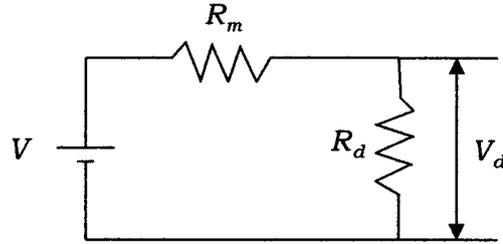


図2-2

1. 無限媒質中で、点電流源 $I$ （点状の源から流れ出す電流が $I$ ）から距離 $r$ だけ離れた点での電流密度ベクトル（単位面積あたりの電流） $\vec{j}$ を求めよ。その際、点電流源を原点とした求める点の位置ベクトルを $\vec{r}$ として、 $\vec{r}$ を用いて答えよ。
2. 抵抗率 $\rho$ の媒質中の任意の点での電流密度を $\vec{j}$ 、電場を $\vec{E}$ とすると、オームの法則

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (1)$$

が成り立つ。獲物の体内の2球間を流れる電流が $\vec{I}_s$ のとき、検出器中の2球の中点 $P$ における電場 $\vec{E}_p$ を、(1)式を利用して求めよ。その際、獲物体内の低電位の球から高電位の球に向かう向きを単位ベクトルを $\vec{i}$ 、 $\vec{i}$ に垂直に獲物から捕食動物に向かう向きを単位ベクトルを $\vec{k}$ として、必要な単位ベクトルを用いて答えよ。

3. 獲物の体内に前問と同じ電流 $\vec{I}_s$ が流れるとき、獲物の2球間の電圧 $V_s$ を求めよ。また、獲物の2球間の抵抗 $R_s$ と獲物から発せられた電力 $P_s$ を求めよ。
4. 図2-2における抵抗 $R_m$ と電圧 $V_d$ を求めよ。また、源(獲物)から検出器(捕食動物)へ転送される電力を計算せよ。
5. 検出される電力を最大にするような抵抗 $R_d$ の最適値を求めよ。また、そのときの最大電力はいくらか。

理論第2問【解答】

電気信号の感知

1. 点電流源  $I$  を中心とした半径  $r$  の球面の面積は  $4\pi r^2$  であり、ベクトル  $\vec{r}$  の方向の単位ベクトルは、 $\frac{\vec{r}}{r}$  と表されるから、求める点での電流密度ベクトル  $\vec{j}$  は、

$$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^3} \vec{r} \quad \dots(2)$$

2. 獲物の高電位の球 A から点 P へのベクトルを  $\vec{r}_+ = -\frac{l_s}{2}\vec{i} + y\vec{k}$ 、球 A による点 P の電場を  $E_+$ 、球 A による点 P の電流密度ベクトルを  $\vec{j}_+$  とし、低電位の球 B から点 P へのベクトルを  $\vec{r}_- = \frac{l_s}{2}\vec{i} + y\vec{k}$ 、球 B による点 P の電場を  $E_-$ 、球 B による点 P の電流密度ベクトルを  $\vec{j}_-$  とする(図2-a)。(2)式と同様な関

係式

$$\vec{j}_+ = \frac{I_s}{4\pi r^3} \vec{r}_+, \quad \vec{j}_- = -\frac{I_s}{4\pi r^3} \vec{r}_-$$

を用いて、点 P の合成電場  $\vec{E}_p$  は、

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= \rho(\vec{j}_+ - \vec{j}_-) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^3} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \end{aligned}$$

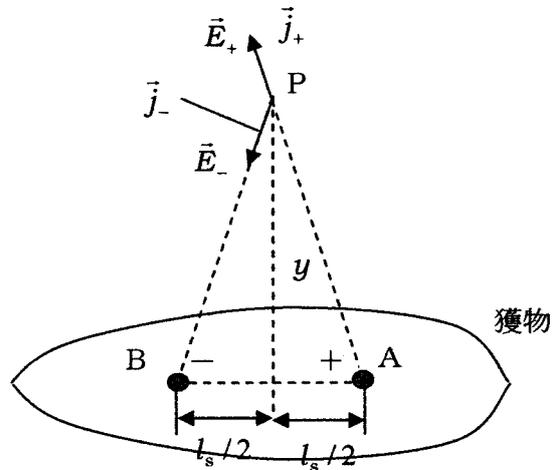


図2-a

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{1}{\left\{ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \left( -\frac{l_s}{2}\vec{i} + y\vec{k} \right) - \frac{1}{\left\{ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{l_s}{2}\vec{i} + y\vec{k} \right) \right] \\ &= -\frac{\rho I_s}{4\pi} \cdot \frac{l_s}{\left\{ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \vec{i} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $l_s \ll y$  より、

$$\vec{E}_p \approx -\frac{\rho I_s l_s \vec{i}}{4\pi y^3}$$

3. 獲物内の2球A, B間の中点を原点に, BからAへの向きにx軸をとる。A, B間の位置xでの電場は,

$$\vec{E}(x) = -\frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{l_s}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{l_s}{2}\right)^2} \right\} \vec{i}$$

電流 $I_s$ を与える電位差 $V_s$ は, 半径 $r_s$ の電流源の球が等電位と考えられるから,

$$\begin{aligned} V_s &= -\int_{-\frac{l_s}{2}+r_s}^{\frac{l_s}{2}-r_s} \vec{E}(x) d\vec{x} = \frac{\rho I_s}{4\pi} \int_{-\frac{l_s}{2}+r_s}^{\frac{l_s}{2}-r_s} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{l_s}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{l_s}{2}\right)^2} \right\} \vec{i} (\vec{i} dx) \\ &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ -\left( \frac{1}{\frac{l_s}{2}-r_s-\frac{l_s}{2}} - \frac{1}{-\frac{l_s}{2}+r_s-\frac{l_s}{2}} \right) - \left( \frac{1}{\frac{l_s}{2}-r_s+\frac{l_s}{2}} - \frac{1}{-\frac{l_s}{2}+r_s+\frac{l_s}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left( \frac{2}{r_s} - \frac{2}{l_s-r_s} \right) = \frac{\rho I_s}{2\pi r_s} \cdot \frac{l_s-2r_s}{l_s-r_s} \approx \frac{\rho I_s}{2\pi r_s} \end{aligned}$$

ここで,  $l_s \gg r_s$ を用いた。

また, 2球間の抵抗は,

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{\rho}{2\pi r_s}$$

電力は,

$$P_s = V_s I_s = \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}$$

4. いま, 図2-bのように, 獲物, 周囲の海水と捕食動物を結ぶ閉回路を流れる電流を $i_d$ とする。電流源2球間の抵抗 $R_s$ の場合と同様に, 検出器中の2球間の抵抗率 $\rho$ の媒質の電気抵抗は,

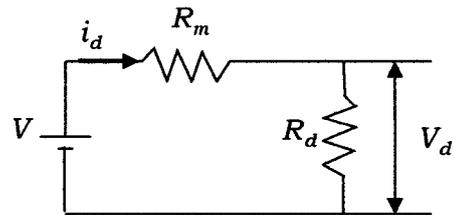


図2-b

$$R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

$l_d$  は  $y$  に比べて十分に小さいから、検出器中の 2 球間の電場は一定で、それは点 P での電場に等しいとみなすことができる。そこで、海水中に存在する検出器中の 2 球間の電位差は、

$$V = |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}$$

となり、捕食動物によって検出される電位差は、

$$V_d = \frac{R_d}{R_d + R_m} V = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \cdot \frac{R_d}{R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d}}$$

源(獲物)から検出器(捕食動物)へ転送される電力は、

$$P_d = V_d i_d = V_d \frac{V}{R_d + R_m} = \frac{\left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{R_d}{\left( R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d} \right)^2}$$

5.  $P_d$  を最大にするには、 $\frac{R_d}{(R_d + R_m)^2}$  を最大にすればよいから、「相加平均  $\geq$  相乗平均」を用いて、

$$\frac{R_d}{(R_d + R_m)^2} = \frac{1}{\left( \sqrt{R_d} + \frac{R_m}{\sqrt{R_d}} \right)^2} \leq \frac{1}{4R_m} \quad (\text{等号は } R_d = R_m \text{ のとき})$$

これより、電力を最大にする  $R_d$  の最適値は、

$$R_d^{\text{op.}} = R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

であり、電力の最大値は、

$$P_d^{\text{max.}} = \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{\pi r_d}{2\rho} = \frac{\rho (I_s l_s l_d)^2 r_d}{32\pi y^6}$$