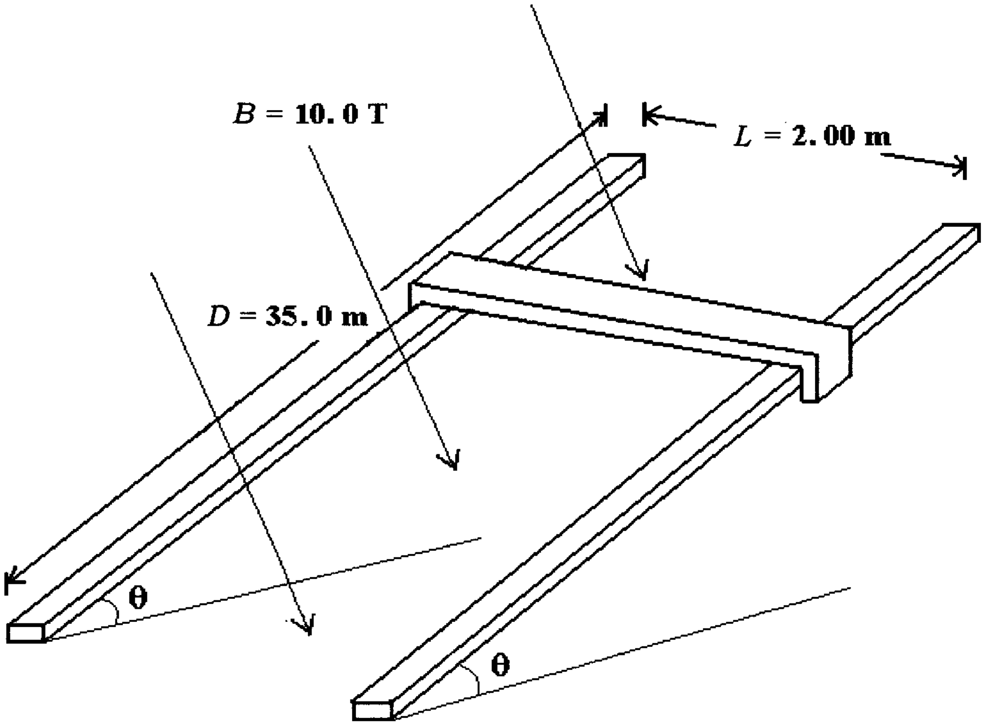
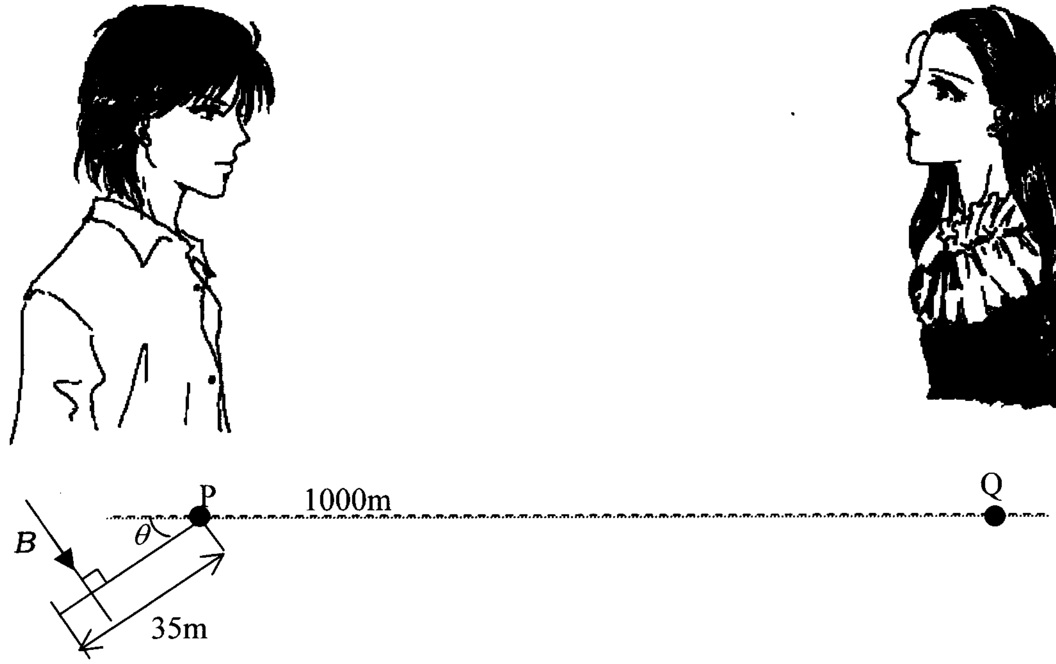
APhO2002(Singapore)

理論第２問　　　　　　　　　　　　　レール・ガン

点Ｐにいる若い男と点Ｑにいる若い女は深く愛し合っていた。これら２点間の直線距離は$w = 1000\text{m}$である。授業でレール・ガンの理論を学んだ若い男は，彼自身を直接打ち出す装置の建設をゆっくり待つことはできなかった。彼は傾斜角θを調整できる斜面をつくり，各々の長さが$D = 35.0\text{ m}$の２本の金属レールを間隔$L = 2.00\text{ m}$だけ隔てて平行に敷き，2424V の直流電圧をレールの端にかけた。また，金属レール上を自由にスライドできるように導体棒を渡し，棒がスライドするとき，彼が棒につかまることが出来るようにした。

レール面に垂直に磁束密度$B = 10.0\text{ T}$の磁場のかけられた系が，熟練した技術者の努力によってつくられた。若い男の質量は70 kg，導体棒の質量は10 kg($m = 70 + 10 = 80\text{ kg}$とする)，その抵抗は$R = 1.0\ \Omega$である。





装置を完成させてそれがうまく作動することを確かめた後，彼はすすり泣きながら彼に次のように話す若い女からの電話を受けた。彼女が電話を切ってから11秒以内に彼が点Qに到着しなければ，彼女の父は彼女を彼から別れさせ，金持ちの男と結婚させようとしている。

若い男は直ちに行動を起こし，彼自身を点Qへ向けて直接打ち出した。

以下のステップにしたがって，時間内に彼がそれを成し遂げることが可能かどうか，もし可能なら，彼が設定する斜面の傾斜角θはいくらか？

(a) レールに平行な方向の，若い男の加速度の表式を求めよ。

(b) ｉ．レール上の時間t_s，および，ⅱ．飛行時間t_fを，θを用いた表式で表せ。

(c) 全時間$T = t_s + t_f$の傾斜角θに対するグラフを描け。

(d) この装置の重要なパラメーターを考慮して，彼が設定すべき角度の範囲を求めよ。もし必要なら，もう１つのグラフも描け。

以下の仮定をせよ：

1) 電話を切ってから打ち出しへ向けた(θを適切な角度に設定するような)すべての準備時間は無視する。すなわち，打ち出しは(若い男のぶら下がった)棒が動き出す時刻$t = 0$に始まるとみなす。
2) 若い男は，その運動を金属レールに沿った任意の点からスタートすることができる。
3) 斜面の上端と点Qは同じ高さであり，それらの間の距離は，$w = 1000\,\mathrm{m}$である。
4) 着地や電気ショックなど，安全性に問題はない。
5) 金属レールの抵抗，電源の内部抵抗，導体棒とレールの間の摩擦，空気抵抗はすべて無

視できる。

6) 重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s}$ とする。

数学的な注：

1． $\int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}$

2． $\frac{dx}{dt} = a + bx$ の解は，　$x(t) = \frac{a}{b}(e^{bt} - 1) + x(0)e^{bt}$　である。

理論第２問　【解答】　　　　　　　レール・ガン

(a) 電源電圧をEとする。導体棒がレール上を上昇する速さがvのとき，回路に流れる電流をIとすると，回路方程式は,

$$E - vBL = RI \qquad \cdots ①$$

若い男と導体棒の質量の和をmとすると，レールに沿った運動方程式は,

$$m\frac{dv}{dt} = IBL - mg\sin\theta \qquad \cdots ②$$

①，②式よりIを消去して,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \frac{v}{\tau} \qquad \cdots ③$$

ここで，$\alpha = \dfrac{EBL}{mR} - g\sin\theta$，$\tau = \dfrac{mR}{B^2L^2}$である。

③式を初期条件「$t=0$のとき，$v=0$」を用いて解くと,

$$v = v_\infty(1-e^{-t/\tau}),\quad v_\infty = \alpha\tau \qquad \cdots ④$$

これより，求める加速度は,

$$\frac{dv}{dt} = \underline{\alpha e^{-t/\tau}},\quad \underline{\alpha = \frac{EBL}{mR} - g\sin\theta},\quad \underline{\tau = \frac{mR}{B^2L^2}}$$

(b) レールから飛び出す時刻を$t=t_s$，そのときの若い男の速さをv_sとすると，④式より,

$$v_s = v_\infty(1-e^{-t_s/\tau}) \quad \therefore \quad t_s = -\tau\ln\left(1-\frac{v_s}{v_\infty}\right)$$

ここで，ln は底がeの自然対数を表す。

水平方向への距離wは,

$$w = (v_s\cos\theta)t_f \qquad \cdots ⑤$$

鉛直方向への運動より,

$$v_s\sin\theta\cdot t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0 \quad \therefore \quad t_f = \frac{2v_s\sin\theta}{g} \qquad \cdots ⑥$$

⑤，⑥式よりt_fを消去して,

$$v_s = \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}},\quad t_f = \sqrt{\frac{2w\tan\theta}{g}}$$

以上より,

i．$\underline{t_s = -\tau\ln\left(1-\dfrac{v_s}{v_\infty}\right)}$，$\underline{v_\infty = \alpha\tau}$，$\underline{v_s = \sqrt{\dfrac{gw}{\sin 2\theta}}}$

ⅱ． $\underline{t_f = \sqrt{\dfrac{2w\tan\theta}{g}}}$

(c) パラメーターの値 $B=10.0\,\mathrm{T}$, $E=2424\,\mathrm{V}$, $L=2.00\,\mathrm{m}$, $R=1.0\ \Omega$, $g=10\,\mathrm{m/s}$, $m=80\,\mathrm{kg}$, $w=1000\,\mathrm{m}$ を代入して，

$$\tau = \frac{mR}{B^2L^2} = \frac{80\times1.0}{10.0^2\times2.00^2} = 0.20\,\mathrm{s}$$

$\dfrac{EBL}{mR} = \dfrac{2424\times10.0\times2.00}{80.0\times1.0} >> g=10$ より，

$$v_\infty = \left(\frac{EBL}{mR} - g\sin\theta\right)\frac{mR}{B^2L^2} \fallingdotseq \frac{E}{BL} = \frac{2424}{10.0\times2.00} \fallingdotseq 121\,\mathrm{m/s}$$

また，$v_s < v_\infty$ であるから，

$$\sqrt{\frac{gw}{\sin2\theta}} = \frac{100}{\sqrt{\sin2\theta}} < 121 \quad \therefore \quad \sin2\theta > 0.68$$

したがって，$\theta > 0.37\,\mathrm{rad}$ でなければならない。

以上より，全時間 T は，

$$T = t_s + t_f$$

$$= -0.20\ln\left(1 - \frac{0.826}{\sqrt{\sin2\theta}}\right) + 14.1\sqrt{\tan\theta}$$

これより，

$\theta=0.38$ のとき，$\sin2\theta = 0.689$，$\tan\theta = 0.399$ $\therefore$ $T = 9.97\,\mathrm{s}$

$\theta=0.40$ のとき，$\sin2\theta = 0.717$，$\tan\theta = 0.423$ $\therefore$ $T = 9.91\,\mathrm{s}$

$\theta=0.42$ のとき，$\sin2\theta = 0.745$，$\tan\theta = 0.447$ $\therefore$ $T = 10.1\,\mathrm{s}$

$\theta=0.46$ のとき，$\sin2\theta = 0.796$，$\tan\theta = 0.495$ $\therefore$ $T = 10.4\,\mathrm{s}$

$\theta=0.50$ のとき，$\sin2\theta = 0.841$，$\tan\theta = 0.546$ $\therefore$ $T = 10.9\,\mathrm{s}$

$\theta=0.51$ のとき，$\sin2\theta = 0.852$，$\tan\theta = 0.559$ $\therefore$ $T = 10.99\,\mathrm{s}$

$\theta=0.52$ のとき，$\sin2\theta = 0.862$，$\tan\theta = 0.573$ $\therefore$ $T = 11.1\,\mathrm{s}$

よって，図 a を得る。

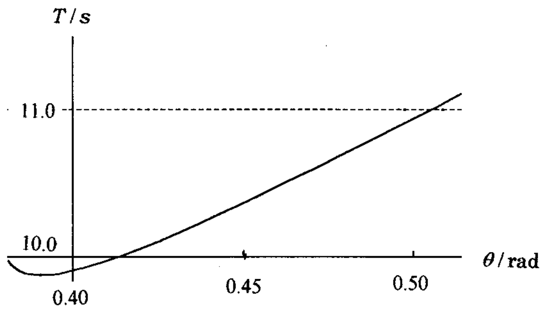


図 a

したがって，$T<11\,\mathrm{s}$ となるのは，$0.37<\theta<0.52$ …⑦

(d) さらに，レールの長さ $D=35.0\,\mathrm{m}$ によって，もう１つの条件がつく。

時刻 $t=t_s$ にレールの上端から飛び出すまでに導体棒がレール上を滑る距離 D_s は，

$$D_s=\int_0^{t_s}v(t)dt=v_\infty\int_0^{t_s}(1-e^{-t/\tau})dt$$

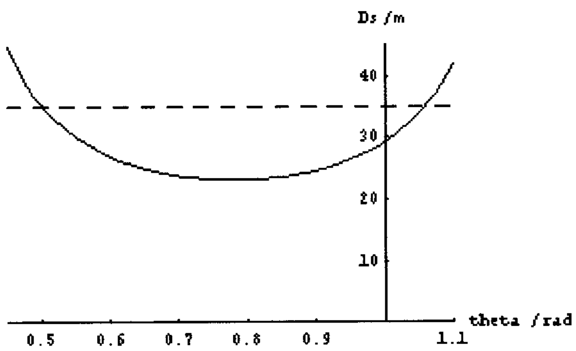
$$=v_\infty\left[t+\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{t_s}=v_\infty\left\{t_s-\tau(1-e^{-t_s/\tau})\right\}=v_\infty t_s-\tau v_s$$

$$=-\tau\left\{v_\infty\ln\left(1-\frac{v_s}{v_\infty}\right)+v_s\right\}=-0.20\times\left\{121\times\ln\left(1-\frac{0.826}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)+\frac{100}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\}$$

これより，

$\theta=0.48$ のとき，$\sin 2\theta=0.819$ $\therefore$ $D_s=36.9\,\mathrm{m}$
$\theta=0.49$ のとき，$\sin 2\theta=0.830$ $\therefore$ $D_s=35.4\,\mathrm{m}$
$\theta=0.50$ のとき，$\sin 2\theta=0.841$ $\therefore$ $D_s=34.1\,\mathrm{m}$
$\theta=0.52$ のとき，$\sin 2\theta=0.862$ $\therefore$ $D_s=31.8\,\mathrm{m}$
$\theta=0.60$ のとき，$\sin 2\theta=0.932$ $\therefore$ $D_s=26.1\,\mathrm{m}$
$\theta=0.70$ のとき，$\sin 2\theta=0.985$ $\therefore$ $D_s=23.1\,\mathrm{m}$
$\theta=0.80$ のとき，$\sin 2\theta=1.00$ $\therefore$ $D_s=22.3\,\mathrm{m}$

さらに正弦関数の対称性を考慮して，図ｂを得る。



図ｂ

したがって，$D_s<D=35.0\,\mathrm{m}$ となるのは，$0.49<\theta$ …⑧

⑦，⑧式より，彼が設定すべき角度 θ の範囲は，

$$\underline{0.49<\theta<0.52\,\mathrm{rad}}$$

さらに詳細な数値計算を行うと，

$0.50<\theta<0.51\,\mathrm{rad}$　すなわち，$28.6°<\theta<29.2°$

となることがわかる。